Doğrusal cebir, konveksite ve çokyüzlü setler (Ch 2)

Amaç; Takip eden kısımlarda kullanılacak bazı tanım ve sonuçları gözden geçirmek

Vektörler;

- n vektörü $\equiv$ n tane sayının satır veya sütun dizilimi
  - satır vektör $\quad n=3 \quad a=[3,5,7]$
  - sütun vektör $\quad n=2 \quad b=\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$
  - zero vektör, "0", tüm elemanları sıfır olan vektör $\vec{0}=(0,0,0,..,0)$
  - i.(ci) vektör = i. pozisyondaki elemanı 1, diğer elemanları sıfır olan vektör.

$$e_i = (0,0,0,\ldots,\underset{\substack{\downarrow \\ i.\text{ eleman}}}{1},\ldots,0,0)$$

- Toplam vektör, $\mathbf{1}$ olarak gösterilir, tüm elemanları 1 olan vektör

Vektörlerde toplama ve çarpım;

a_1, a_2 iki n vektör olsun;

$a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots a_{n1})$

$a_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots a_{n2})$

- Toplama : $a_1 + a_2 = (a_{11} + a_{12}; \; a_{21} + a_{22}, \dots, a_{n1} + a_{n2})$

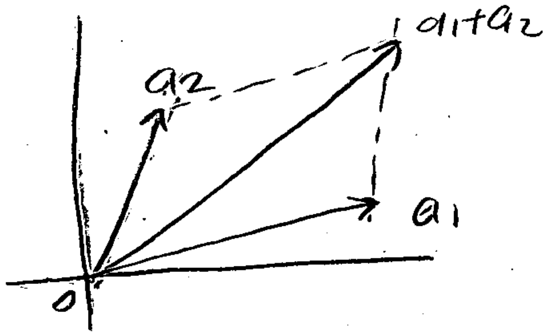
- İçsel çarpım (inner product) a ve b n vektörler olsun

$$a.b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

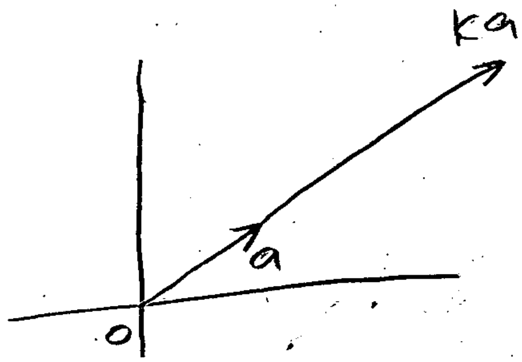
$$a = (1, -1) \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a.b = -2 - 1 = -3$$

- Bir sabit k ile çarpım

$$ka = (ka_1, ka_2, \dots ka_n)$$



n=2 vektörlerde toplama



n=2 vektörle bir sabitin çarpımı

Vektörün Normu :

- Vektör boyutunun ölçüsüdür

$$l_p \text{ norm} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$$

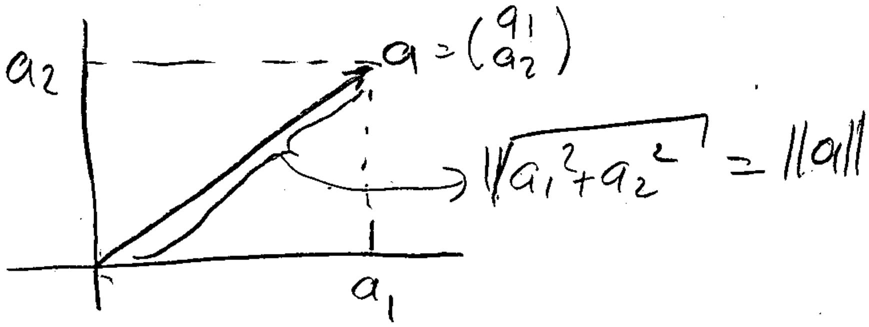
$$l_2 \text{ norm} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \rightsquigarrow \text{öklid normu (Eucledian norm)}$$

- Biz öklid normunu kullanacağız

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Öklid normu $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2}$

$n=2$ için $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



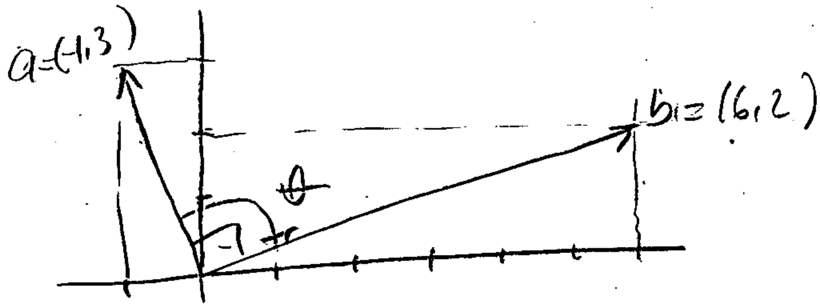
– İki vektör arasındaki açı θ olsun.

$$\cos\theta = \frac{|a.b|}{\|a\|\,\|b\|}$$

Eğer $\theta = 90°$ ise $\cos\theta = 0$ yani

$|a.b| = 0$ dır.

Örnek: $a = (-1,3)$ $b = (6,2)$ $(n=2)$



$|a.b| = (-1.6 + 3.2) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$
$\Rightarrow \theta = 90°$

a ve b birbirine diktir (ortagonaldir) denir.

Öklid Uzayı:

$E^n \rightsquigarrow$ n boyutlu öklid uzayı

$\equiv$ n boyutlu tüm vektörlerden oluşan uzay

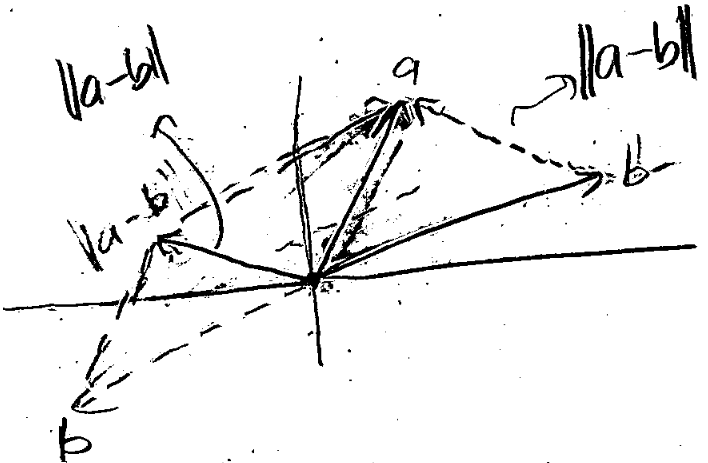
$E^1 \rightsquigarrow$ Reel sayılar

Uzaklık:

E^n'de iki vektör a, b olsun. Bu iki vektör arası öklid uzaklığı

$$\|a-b\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2}$$

olarak tanımlanır.



E^2'de $\|a-b\|$ ye örnek

Doğrusal katışım (linear combination)

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ reel sayılar ve $a_1, a_2 \ldots a_k \in E^n$ (n boyutlu vektör) olsun.

- Eğer $b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ ise b'ye $a_1, a_2 \ldots a_k$ nın doğrusal katışımı denir (linear combination)

- Eğer ek olarak $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ ise afin katışımdır (affine kombination)

- Eğer hem $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ hemde $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, 2 \ldots k$ ise b 'ye $a_1, a_2, \ldots a_k$ nın konveks katışımıdır (convex combination)

Doğrusal Bağımsızlık (linear independency)

$a_1, a_2, \ldots, a_k \in E^n$ olsun.

Eğer $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ olması için $\lambda_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$ gerekiyorsa $a_1, a_2 \ldots a_k$ vektörleri doğrusal bağımsız vektörlerdir. Eğer $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ şartını sağlayan ve hepsi sıfır olmayan λ_i değerleri varsa doğrusal bağımlıdırlar.

Örnek 1 $a_1=(1,2)$ $a_2=(-1,1)$

$$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(-1,1)=(0,0)$$

$$(\lambda_1, 2\lambda_1)+(-\lambda_2,\lambda_2)=(0,0)$$

$$(\lambda_1-\lambda_2,\ 2\lambda_1+\lambda_2)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

$$2\lambda_1=-\lambda_2=-\lambda_1$$

ancak $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ çözüm olur, Dolayısıyla doğrusal bağımsız.

Örnek 2: $a_1=(1,2,3)$ $a_2=(-1,1,-1)$ $a_3=(0,3,2)$

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i a_i=\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(-1,1,-1)+\lambda_3(0,3,2)=(0,0,0)$$

$$(\lambda_1-\lambda_2,\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\ 3\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\lambda_1-\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

$$2\lambda_1+\lambda_1+3\lambda_3=0 \Rightarrow 3\lambda_1=-3\lambda_3$$

$$\lambda_1=-\lambda_3$$

$$3\lambda_1-\lambda_1+2(-\lambda_1)=0$$

$$2\lambda_1-2\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ herhangi bir değeri alır.}$$

$\lambda_1=1$ olsun $\lambda_2=1$ olur $\lambda_3=-1$ olur

$\Rightarrow$ vektörler doğrusal bağımlıdır.

Kapsar Küme (Spanning Set):

$a_1, a_2 \ldots a_k \in E^n$ olsun. Eğer herhangi bir vektör $b \in E^n$, $a_1, a_2 \ldots a_k$'nın doğrusal katışımı olarak yazılabiliyorsa, $a_1, a_2 \ldots a_k$ vektör kümesi E^n'i kapsar denir. Başka bir deyişle eğer $b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ verecek $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ skalar değerler seti bulabiliyorsak $a_1, a_2 \ldots a_k$ E^n'i kapsar!

Örnek: $n=2$ $a_1=(1,0)$ $a_2=(-1,3)$ $a_3=(2,1)$

E^2'yi kapsar mı?

$$b=(b_1,b_2) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a_i$$

$$(b_1,b_2) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(-1,3) + \lambda_3(2,1)$$

$$(b_1,b_2) = (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 \,,\, 3\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$b_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 \qquad b_2 = 3\lambda_2 + \lambda_3$$

3 bilinmeyenli iki denklem (çoklu çözüm).

$\lambda_3 = 0$ olsun $\Rightarrow$ $b_1 = \lambda_1 - \lambda_2$

$b_2 = 3\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{b_2}{3}$

$\lambda_1 = b_1 + \frac{b_2}{3}$

$\lambda_2 = 0$ olsun $\Rightarrow$ $\lambda_1 = b_1 - 2b_2$

$\lambda_3 = b_2$

yani λ_i değerleri bulabiliyoruz o halde a_1, a_2, a_3 vektörleri E^2'yi kapsar.

Doğuray (Basis)

$a_1, a_2 .. a_k$ vektörleri E^n'de bir doğuraydır eğer;

1) $a_1, a_2 .. a_k$ E^n'i kapsar
2) eğer bu vektörlerin birisi çıkartılırsa kalan vektörler E^n'i kapsamaz.

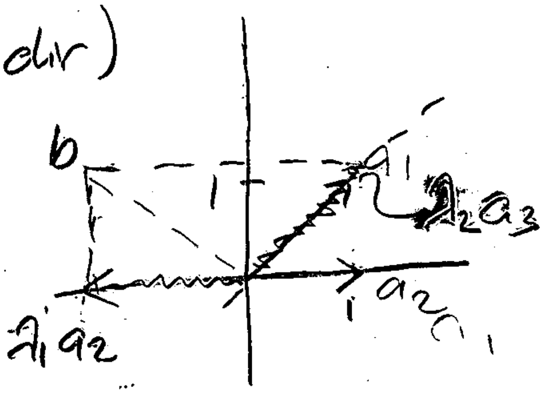
Bu iki koşul şuna eşdeğerdir;

i) $k = n$ dir ve 2) $a_1, a_2 .. a_k$ doğrusal bağımsızdır.

Örnek: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ E^2'de iki

2 doğrusal bağımsız vektör

≡ Bu iki vektör E^2'de bir doğuraydır (basis'dir)



$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_2$$

– Bir doğuray her hangi bir vektörü "unique" olarak belirler;

İspat: $a_1, a_2, \ldots a_n \in E^n$ olsun ve $a_1, a_2, \ldots a_n$ doğuray olsun. Eğer;

$$b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \quad \text{ve aynı zamanda} \quad b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j' a_j$$

ise $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_j') a_j = 0$ olmalıdır.

a_j'ler doğrusal bağımsız olduğundan

bu $\lambda_j - \lambda_j' = 0 \quad \forall j = 1, \ldots n$ demektir

$\Rightarrow \lambda_j = \lambda_j'$ olmalıdır. Yani "unique" li- belirler.

– Bir E^n uzayının birden çok doğurayı olabilir.

Bir doğurayda (basis'te) bir vektörün yerine başkasının girmesi;

– Simpleks iterasyonlarında bir basis'ten diğerine geçilir. Bu bir vektörün diğeriyle yer değiştirmesiyle olur.

– Yeni vektör setinin basis olabilmesi için giren ve çıkan vektörler dikkatli seçilmelidir.

Ör:
$a_1 = (1,2,1)$ $a_2 = (3,0,1)$ ve $a_3 = (2,-2,1)$ olsun

⇒ Bu vektörler doğrusal bağımsızdır ve E^3'te basis oluşturur.

a_3'ü $(2,-2,0)$'la değiştirsek yeni set basis olur mu?

⇒ olmaz çünkü yeni a_3, a_2, a_1 doğrusal bağımsız değildir ($a_3 = a_2 - a_1 \Rightarrow a_2 - a_1 - a_3 = 0$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a_i = 0$ ($\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$)

– Eğer E^n'de bir basis varsa ve bu basisten a_j yerine a vektörünü eklemek istiyor isek yeni setin basis olması için ne şart gerekir?

– $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, E^n de bir basis

– a_j yerine biz a vektörünü koymak istiyoruz.

$a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$ eşitliğinde

$\lambda_j \neq 0$ ise yeni sette bir basis oluşturur.

↳ çıkan vektörün katsayısı

<u>İspat:</u>

yeni vektör $a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$

$\Rightarrow \lambda_j \neq 0$ olsun

$\Rightarrow a_1, a_2 \ldots a_{j-1}, a, a_{j+1}, a_{j+2} \ldots a_n$ setinin

doğrusal bağımsız olduğunu gösterelim;

Varsayalım ki aşağıdakini sağlayan μ ve μ_i

$(i\neq j)$ lar var olsun

$$\sum_{i\neq j}\mu_i a_i+\mu a=0$$

$a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$ yi a'nın yerine koyar isek;

$$\sum_{i\neq j}\mu_i a_i+\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$$

$$=\sum_{i\neq j}\underbrace{(\mu_i+\mu\lambda_i)}_{\theta_i}a_i+\underbrace{\mu\lambda_j}_{\theta_j}a_j=0$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\theta_i a_i=0$$

(a_i'ler doğrusal bağımsız olduğundan tüm $\theta_i=0$ dır.)

$$\Rightarrow \underbrace{\mu \lambda_j = 0}_{\downarrow} \text{ ve } \underbrace{\mu_i + \mu \lambda_i = 0}\ \forall i \neq j$$

$\lambda_j \neq 0 \Rightarrow \mu = 0$

$\hookrightarrow \mu = 0$ ve $\mu_i + \mu \lambda_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0\ \forall i \neq j$

Dolayısıyla;

$\sum_{i \neq j} \mu_i a_i + \mu a = 0$ sadece $\mu = 0$ ve $\mu_i = 0$ $\forall i \neq j$ iken mümkündür

– yani $a_1, a_2, \ldots a_{j-1}, a, a_{j+1} \ldots a_n$ seti doğrusal bağımsızdır.

– Tek şart: $\lambda_j \neq 0$ ($a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ eşitliğinde)

– Zaten $\lambda_j = 0$ ise $a = \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i$ olurdu ve $a, a_1, a_2 \ldots a_{j-1}, a_{j+1} \ldots a_n$ doğrusal bağımlı olurdu.

MATRİSLER:

- Toplama, skalarla çarpma, iki matrisin çarpımı bilindiği varsayılacak. Matrisler büyük harfle gösterilecek.

- Çarpımla ilgili olarak; eğer A bir $m \times n$ matris ve B bir $p \times q$ matris ise

- AB, $n=p$ ise tanımlıdır
- BA, $q=m$ ise "

$AB \neq BA$

- Birim matris: I_n; $n \times n$ ve tüm diyagonel elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan matris.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Devrik dönüşüm (Transposition).

A bir $m \times n$ matris ise, A^t'nın devrik matrisi A^t, i. satırı A'nın i. sütunu olan bir $n \times m$ matristir.

$(A^t)^t = A$, Eğer A ve B aynı boyuta sahipse

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

- Eğer AB tanımlı ise $(AB)^t = B^t A^t$

Matrisin kertesi (rankı)

- Doğrusal bağımsız olan satırlarının yada sütunlarının sayısı.
- Eğer A bir $m \times n$ matris ise
  - kerte$(A) \leq \min\{m, n\}$
  - kerte$(A) = \min\{m,n\}$ ise tam kerte (full rank)

Elemanter matris operasyonlarıyla doğrusal eşitlik sistemlerinin çözümü:

n bilinmeyenli m eşitlikten oluşan sistem;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b$$

(A $m \times n$ matris)
(x n vektör)
(b m vektör

$Ax = b$'den elemanter satır operasyonlarıyla (sonlu sayıda) $A'x = b'$ elde etmiş isek, $A'x = b'$'nin çözümü ile $Ax = b$'nin çözümü aynıdır.

elemanter satır operasyonları;

1) satır i ve satır j 'nin yerini değiştirmek
2) " i yi k gibi bir skalarla çarpmak
3) " i yi satır i + k.satır j ile değiştirmek.

* (A,b) 'yi $\longrightarrow$ $\left[\begin{matrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{matrix}, b'\right]$ dönüştürmek ve

sonra aşağıdan başlayıp yerine koyarak çözmek

(gauss reduction)

* (A,b) yi $\longrightarrow$ $[I_n, b']$ dönüştürmek.

(gauss-jordan reduction).

Örn:
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$$

$$(A,b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

elemanter satır operasyonları

$$(A',b') = \left[\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 26/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \rightarrow x_1 = 5 - \frac{4}{2} - \frac{2}{2} = 2. \\ \rightarrow x_2 = \frac{26}{5} - \frac{6}{5} = 4 \\ \rightarrow x_3 = 2 \end{matrix}$$

Matrisin tersi :

- A bir $n \times n$ matris olsun. B de bir $n \times n$ matris ve $B \times A = I$ ise B'ye A'nın tersi denir.
- $A^{-1} = B$ olarak gösterilir.
- A^{-1} varsa A ye tekil olmayan (non-singular) denir. A^{-1} yoksa, A'ya tekil denir.
- A^{-1} in olması için $A_{n \times n}$ nin satırlarının (veya sütunlarının) doğrusal bağımsız olması gerekir.

$\equiv$ kerte$(A) = n$ olması gerekir

- Matrisin tersinin bulunması ;

(A, I) "genişletilmiş" matrisini ele alalım.

$A^{-1}(A, I) = (I, A^{-1})$

$\Rightarrow$ yani (A, I) 'yı $\longrightarrow (I, B)$ ye çevirdiğimizde $B = A^{-1}$ olarak elde edilir.

Örn:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A, I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

elemanter satır operasyonlarıyla ;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/12 & -3/12 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 3/12 & 3/12 & -3/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 3/12 & 5/12 \end{array}\right]$$ halini alır.

$$\underbrace{\begin{matrix} 5/12 & -3/12 & -1/12 \\ 3/12 & 3/12 & -3/12 \\ -1/12 & 3/12 & 5/12 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Örn. A^{-1} in olmadığı durum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad a_3 = a_1 + a_2 \text{ (doğrusal bağımlı)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ero}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

– sol tarafta birim matris elde edilemez!

$\Rightarrow A^{-1}$ yok $\Rightarrow$ A tekil bir matris (singular)

– $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;)

– Eğer A ve B tekil olmayan nxn matrisler ise

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad B^{-1}A^{-1}(A,B) \quad (B^{-1}I, A^{-1}I) = (B^{-1}, A^{-1})$$

– Üçgensel matrislerin (alt diagonal veya üst diagonal) her zaman tersi vardır (neden?).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I & -CD^{-1} \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array}\right]$$