2.3 Doğrusal Eşitlik sistemleri

$Ax=b$ sistemini ele alalım $(A_{m \times n})$

- Genişletilmiş matris : $(A,b)_{m,n+1}$
- Eğer kerte$(A,b) >$ kerte(A)

$\Rightarrow$ b yi $a_1, a_2 \ldots a_n$ in doğrusal kombinasyonu olarak gösteremeyiz.

$\Rightarrow$ yani bu sistemin bir çözümü yoktur.

(özel olarakta $Ax=b, x \geq 0$ sisteminin de çözümü olmaz).

- Varsayki kerte(A,b) = kerte$(A) = k$;

$$(A,b) = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

A_1 bir $k \times n$ matris
b_1 bir k vektör

A_2 bir $(m-k)$ matris
b_2 bir $(m-k)$ vektör.

ve

kerte(A_1) = kerte$(A_1, b_1) = k$

$\Rightarrow (A_1, b_1)$ bağımsız eşitlikler seti

(A_2, b_2) bağımlı eşitlikler seti.

②

$\Rightarrow$ eğer bir X $A_1X = b_1$ 'i sağlıyorsa $A_2X = b_2$ yi otomatik olarak sağlar.

yani $A_2X = b_2 \rightsquigarrow$ fazla (gereksiz) kısıtlar (redundant const.)

$\Rightarrow$ gereksiz kısıtları atabiliriz.

- $A_1X = b_1$ i ele alalım;

* k bağımsız satır (ve sütun) var.

* A_1'deki sütunların yerlerini ayarlayarak ilk k bağımsız sütunu ilk sıralara alalım ve $A = (B, N)$ olsun.

$\Rightarrow$ B $k \times k$ bağımsız sütunlar $rank(B) = k$

$\Rightarrow$ B'ye temel matris (basic matrix) denir (E^k'da bir basis (doğuray) oluşturur)

$\Rightarrow N \rightsquigarrow$ (non-basic) temel olmayan matris

* X'i de benzer şekilde ikiye ayırır isek;

$X = (X_B, X_N) \Rightarrow X_B = [X_1, X_2, \ldots X_k]$ $X_N = [X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots X_n]$

$$A_1X = b_1 \equiv (B, N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \Rightarrow BX_B + NX_N = b_1$$

$\Rightarrow B$'nin tersi vardır. (kerte$(B)=k$ olduğundan)

$$B^{-1}(BX_B + NX_N) = B^{-1}b_1$$

$$X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b_1 \Rightarrow \underline{X_B = B^{-1}b_1 - B^{-1}NX_N}.$$

$\Rightarrow$ eğer $k=n$ ise $\Rightarrow$ N (boş küme) yoktur

ve $X_B = B^{-1}b_1$ (unique soln.)

$X_B = A_1^{-1}b_1$

$\Rightarrow$ eğer $k<n$ ise $\Rightarrow$ X_N'lerin alacağı değerlere göre X_B çözümü bulunur. X_N'lere herhangi bir değer verebiliriz.

$\Rightarrow$ sonsuz sayıda mümkün çözüm.

$A_1X = b_1$ için

— m bilinmeyen; k bağımsız eşitlik

— $n=k \Rightarrow$ unique soln. $X_B = A_1^{-1}b$

— $n>k \Rightarrow$ X_N'ler atanacak değere göre sonsuz çözüm).

— Sonsuz çözüm durumunda $(n>k)$, eğer $X_N = 0$ atarsak $\Rightarrow X_B = B^{-1}b_1 - B^{-1}N0$

$X_B = B^{-1}b_1$ çözümünü buluruz.

— x_N'lerin sıfır olduğu bu çözüme temel çözüm denir. (Basic solution)

Özet:

① — $\text{kerte}(A,b) > \text{kerte}(A)$ $Ax=b$ çözümü yok.

② — $\text{kerte}(A,b) = \text{kerte}(A) = k = n$ $Ax=b$ tek çözümü var

③ — $\text{kerte}(A,b) = \text{kerte}(A) = k < n$ $Ax=b$ sonsuz çözümü var.

— Bu üç durumdan hangisi $Ax=b$ için gerçekli olduğunu Gauss-Jordan indirgemesi uygulayarak bulabiliriz.

$$Ax=b \xrightarrow{ero} \begin{bmatrix} I_k & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} x = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rank}(A) = k \leq \min(m,n)$

* eğer $k<m$ ise ve $b_2' \neq 0$ 1. durum
  çözüm yok
* eğer $k=n\leq m$ ve $b_2'=0$ 2. durum
  tek çözüm
* eğer $k<n$, $k<m$ ve $b_2'=0$ 3. durum
  sonsuz sayıda çözüm.

Örn: 2.4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- kerte $(A) \leq \min(3,4) = 3$ (kerte$(A) = 3$ olduğu gösterilebilir).

- Sistemi çözmek için 3 kolonu birim matrise dönüştürmeye çalışalım. (gauss-jordan reduction).

$$(A,b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

- İlk satırı 2.'ye ekle
- İkinci satırı 4'e böl
- yeni ikinci satırı -2'le çarp 1'e ekle
- " " " -1'le çarp 1'e ekle.

$$(A', b') = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -7/4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}\right]$$

$$(C) \rightarrow \begin{pmatrix} I_k, & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad \text{kerte}(C) = k.$$

kerte $(A') = 3$ kerte $(A', b') = 3$

$$\begin{pmatrix} I_k & Q \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_k Q: yok

(0,0) satırı yok

$$\begin{pmatrix} I_k, & Q \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -7/4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -2 \end{array}\right)$$

I_k Q

(0,0) satırı yok.

-Hangi durum?

$\text{rank}(A) = 3 < n$ ve $b_2' = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{matrix} -7/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{matrix}}_{N} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \to b_1'$$

b_2' yok (sıfır).

$\Rightarrow$ SONSUZ ÇÖZÜM.

$X_N = X_4$ $\qquad$ $B = I_3$

$X_B = \{x_1, x_2, x_3\}$ $\qquad$ $N = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

$X_N = \lambda$ ise $\left(x_1 = 4 + 7/4\,\lambda,\ x_2 = 4 + 1/4\,\lambda,\ x_3 = -2 + 1/4\,\lambda\right)$.

$* \left(X_B = B^{-1}b - B^{-1} N X_N\right)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \underbrace{X_4}_{x_4 = \lambda}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/4\,\lambda \\ -1/4\,\lambda \\ 1/4\,\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 7/4\,\lambda \\ 4 - 1/4\,\lambda \\ -2 + 1/4\,\lambda \end{pmatrix}$$

KONVEKS SETLER VE FONKSİYONLAR

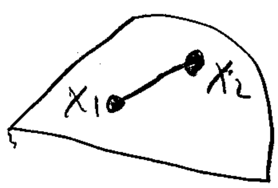
Konveks set: $X \in E^n$ olsun (n boyutlu vektörler kümesi)

X'teki herhangi iki vektör x_1, x_2 için.

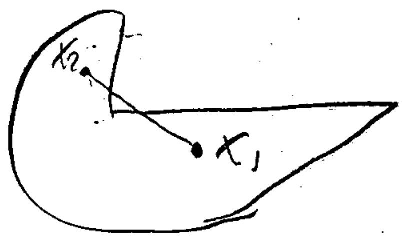
her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ ise.

X'e konvex set denir.

- $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ bize x_1'i x_2'ye birleştiren doğru parçasını verir.
- $0 \leq \lambda \leq 1$ ise $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ konvekx kombinasyon denişti.
- Eğer $0 < \lambda < 1$ ise buna katı konveks komb. diyeceğiz. (strict convex comb.)
- Geometrik olarak E^2'de örnekler:



Konveks



Konveks değil.

Örn: DP olurlu bölgesi konveks bir set midir?

$\bar{X} = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ $A_{m \times n}$ b_m

İki olurlu nokta alalım; X_1 ve X_2.

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \overset{?}{\in} \overline{X} \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

$$\equiv A\left(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2\right) \doteq b \text{ ve}$$

$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \geq 0$ ise $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in \overline{X}$'tir.

$$\lambda \underbrace{A X_1}_{b} + (1-\lambda) \underbrace{A X_2}_{b} = b.$$

$\lambda b + (1-\lambda) b = b$ eğer $0 \le \lambda \le 1$

$X_1 \geq 0$ ve $X_2 \geq 0$ ise $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \geq 0$ olur

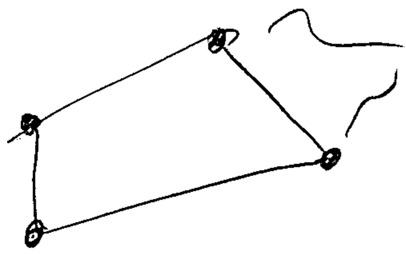
yani set konvekstir.

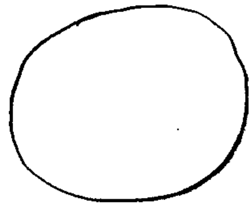
Uç Nokta (Extreme point):

$X \in \overline{X}$ (konveks set) olsun. X'i eğer kümedeki iki noktanın katı konveks kombinasyonu olarak ifade edemiyorsak, X noktası bir uç noktadır.

$\equiv$ $X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ $\lambda \in (0,1)$ sadece $X = X_1 = X_2$ iken mümkünse (aynı nokta)

$\equiv$ X iki nokta arasına çizilecek doğru üzerinde olamıyorsa





Dairede tüm noktalar uç nokta.

Hiper düzlem ve Yarı uzay

- Uzayı ikiye ayıran düzlem
- E^2 de bir doğru, E^3'te bir düzlem

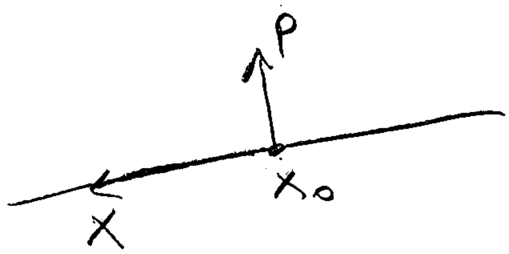
- H: hiper düzlem

$H = \{x : px = k\}$ setidir.

p, E^n uzayında bir vektördür.

$H = \{x : \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = k\}$ denektir.

p'ye hiper düzlemin normu denir ve p hiper düzleme diktir.



İspat: $x, x_0 \in H$ olsun.

$\Rightarrow px_0 = k$

$px = k$

$\Rightarrow p.(x - x_0) = px - px_0$

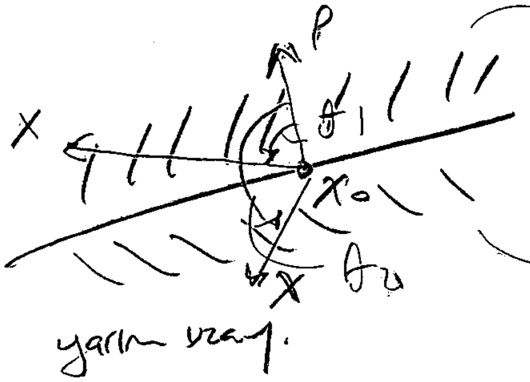
$p.(x - x_0) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 90°$

- Hiper düzlem uzayı ikiye böler.

yarım uzay $\{x : px \geq k\}$ veya $\{x : px \leq k\}$

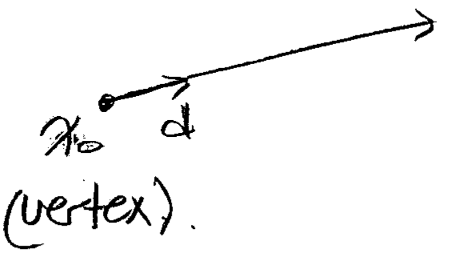
$\{x : p(x-x_0) \geq 0\}$ $\theta_1 \leq 90$



$\{x : p(x-x_0) \leq 0\}$ $\theta_2 \geq 90$

Işınlar ve yönleri;

Işın formu $\{x_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ olan noktalar kümesi



d: ışının yönü, non-zero vektör.

x_0: kök

Konvex setin yönü ;

d konveks set X'in yönüdür eğer;

$\forall x_0 \in X$ için $\{x_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ ışınıdan aynı konveks set içerisindeyse

- d yönünde ne kadar gidersek gidelim sette kalırız.
- sınırlı setlerin yönü yoktur.

- Bir DP nin olurlu bölgesini ele alalım.

$X = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

* Tamamen sıfır olmayan bir d yönünün, bu setin yönü olması için: $\forall \lambda \geq 0$ için

$$A(x+\lambda d) \leq b$$

$$x+\lambda d \geq 0$$ sağlamalıdır.

- $\forall x \in X$ için ilk eşitsizlik; ne zaman sağlanır?

$\Rightarrow \underbrace{Ax}_{\leq b} + \lambda Ad \leq b$

$\lambda \geq 0 \quad \Rightarrow$ eğer $Ad \leq 0$ ise sağlanır.

- İkinci eşitsizlik.

$x + \lambda d \geq 0$.

$x \geq 0 \Rightarrow \lambda d \geq 0 \Rightarrow d \geq 0$ ise sağlanır.

Dolayısıyla d yönünün X setinin yönü olması için;

$d \geq 0,\ d \neq 0$ ve $Ad \leq 0$ olmalıdır.

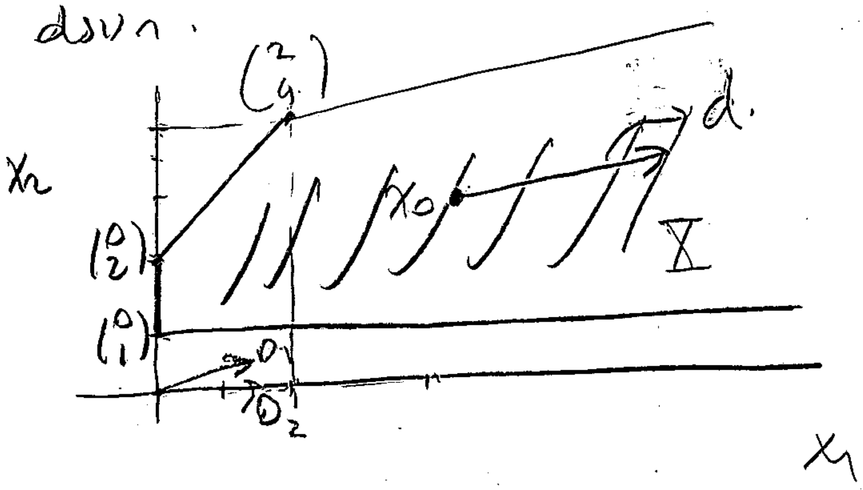
Eğer set $X = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ ise

$\Rightarrow d \geq 0,\ d \neq 0,\ Ad = 0$ olmalıdır.

Örn 2.5

$X = \{ (x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 \geq -6,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 1 \}$

dsun.



$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ bu setin yönü ise;

$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $(x_0 + \lambda d) \in X$ olmalı. ($\lambda \geq 0$ için)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in X$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + \lambda d_1 \\ x_2 + \lambda d_2 \end{pmatrix} \in X$$

$x_1 - 2x_2 + \lambda(d_1 - 2d_2) \geq -6 \rightsquigarrow d_1 - 2d_2 \geq 0$

$x_1 - x_2 + \lambda(d_1 - d_2) \geq -2 \rightsquigarrow d_1 - d_2 \geq 0$

$x_1 + \lambda d_1 \geq 0 \rightsquigarrow d_1 \geq 0$

$x_2 + \lambda d_2 \geq 1 \rightsquigarrow d_2 \geq 0$

$d_1 - d_2 \geq 0 \Rightarrow d_1 \geq d_2$
$d_1 - 2d_2 \geq 0 \Rightarrow d_1 \geq 2d_2$ $\Big\} \; d_1 \geq 2d_2.$

Dolayısıyla $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ X setinin yönüdür eğer;

$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underset{(2)}{d_1 \geq 0}$, $\underset{(3)}{d_2 \geq 0}$, $\underset{(1)}{d_1 \geq 2d_2}$

$\Rightarrow$ normu (uzunluğu) ~~bir~~ olacak şekilde normalize edelim $\Rightarrow \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 1$.

1 — $\underline{d_1 = 2d_2}$ $\Rightarrow$ $d_1^2 + d_2^2 = 1$ $(2d_2)^2 + d_2^2 = 1$

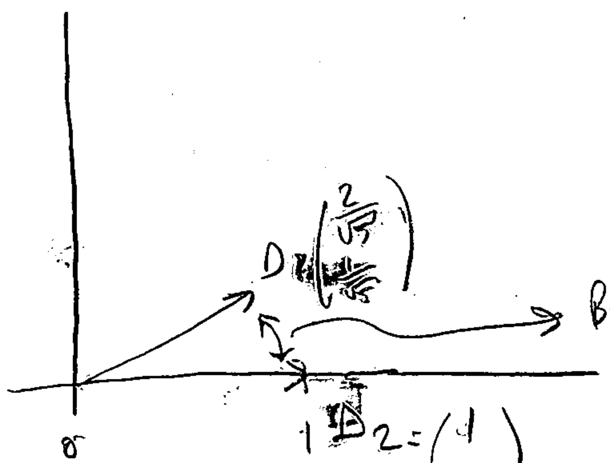
$5d_2^2 = 1$ $d_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow d_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$D_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

2 — $\underline{d_1 = 0}$ $\Rightarrow$ $d_2 = 1 \rightsquigarrow$ yön. $D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 — $\underline{d_2 = 0}$ $\Rightarrow$ $d_1 = 0$ olmalı $\rightsquigarrow$ yön değil ($d \neq 0$ olmalı).



Bu iki yön arasındaki tüm yönler setin yönüdür.

$\equiv$ D_1 ve D_2'nin doğrusal pozitif kombinasyonları

Bir Konveks Setin Uç Yönleri;

- Uç nokta tanımına benzer bir tanıma sahip.
- Uç yön; iki birbirinden farklı yönün pozitif doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilemeyen set yönleridir.

Örn: Bir önceki örnekte $d_1 = (1,0)$ $d_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ iki uç yöndür. Diğer tüm yönler;

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \quad , \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad \text{şeklinde}$$

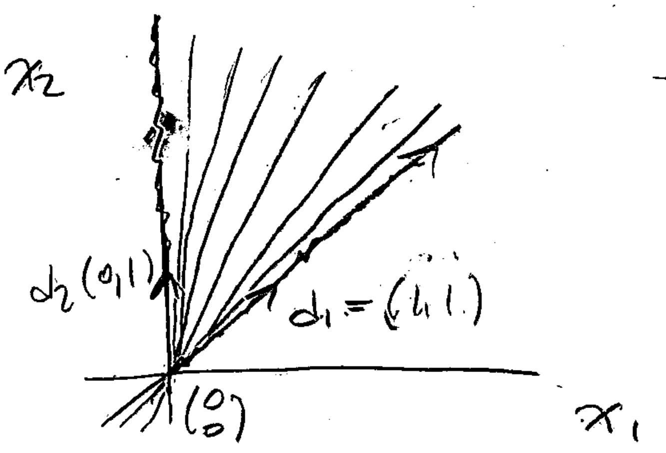
gösterilebilir;

- Uç ışın; yönü uç yönlerden birisi olan ışın

Konveks Huniler;

- Orijinden çıkan ışınlardan oluşan set

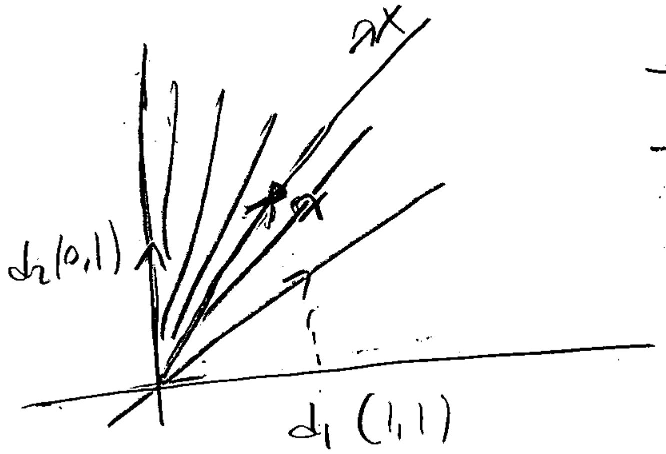
Örn: $C = \{ (x_1, x_2) ; x_1 \geq 0 , x_1 \leq x_2 \}$



- Aşağıdaki ek özelliğe de sahip konveks set

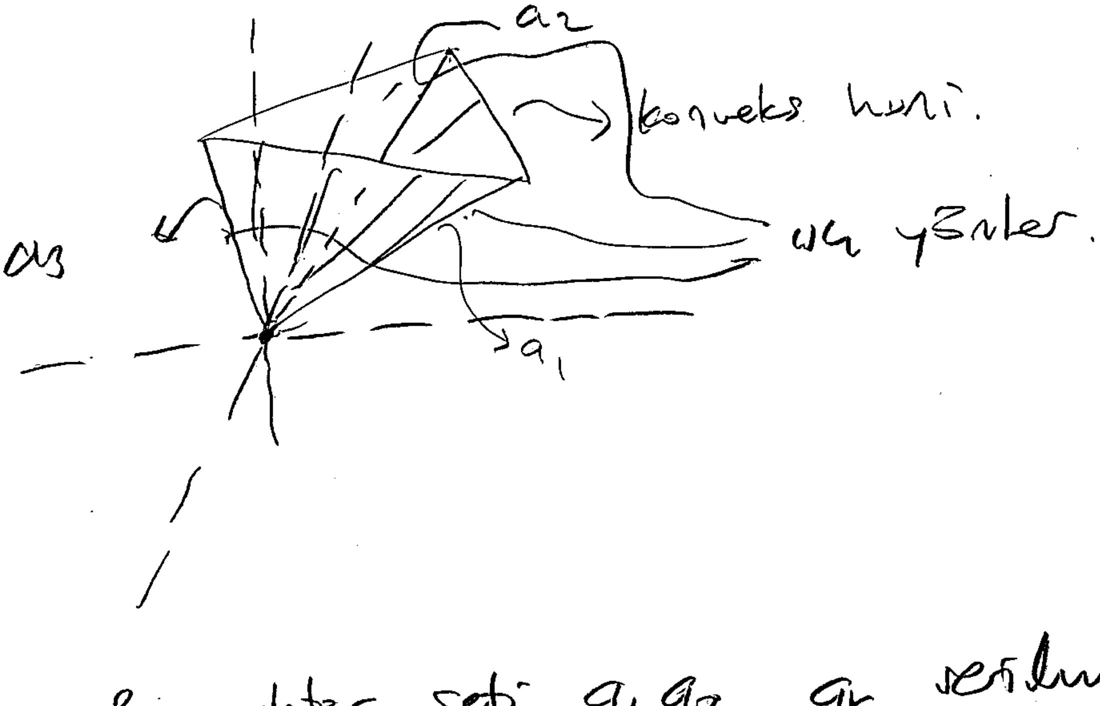
* $x \in C$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in C$

λx ; $\lambda \geq 0$ ≡ x'in yönündeki ışın.



— her x için x'in yönündeki
— ışında setin içinde olan
konveks set. ≡ konveks kone.

— Konveks huniler uç yönleri tarafından tamamen tanımlanır.



— Bir vektör seti $a_1, a_2 .. a_k$ verilmiş olsun. Bu vektörlerin tüm pozitif lineer kombinasyonları bir konveks huni oluşturur;

$$C=\left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_i : \lambda_j \geq 0 \text{ for } j=1,2..k \right\}$$

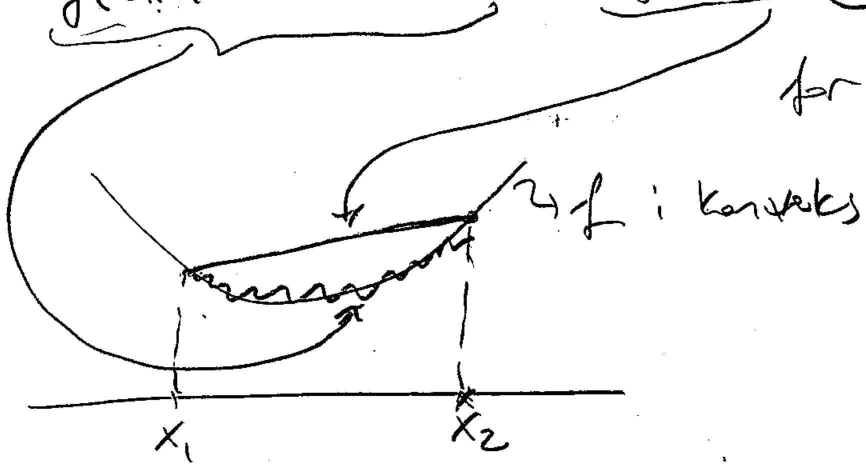
Örn: yukarıdaki şekil a_1, a_2, a_3 ün oluşturduğu konveks hunidir.

KONVEKS ve KONKAV FONKSİYONLAR:

- Vektör $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ için tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlarsa konvekstir;

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

for all $\lambda \in [0,1]$

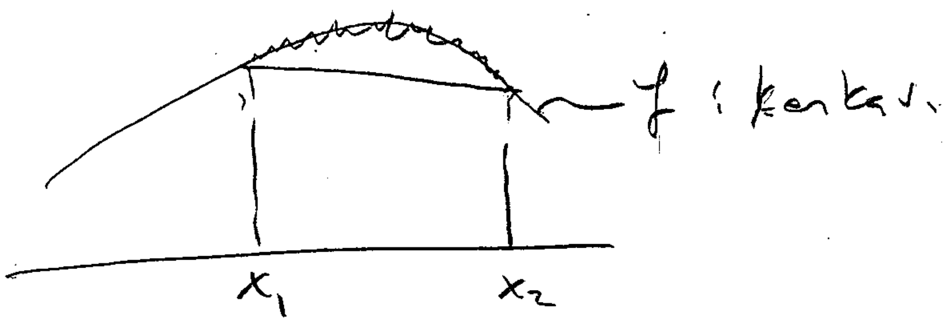


- f konkavdır eğer;

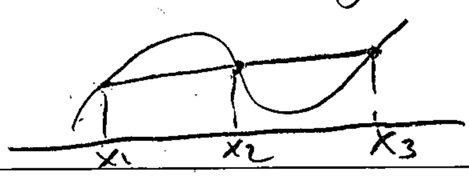
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

for all $\lambda \in [0,1]$

$\equiv -f$ konveks ise f konkavdır.



- Konkav veya konveks olmayan bir fonksiyon;



Polihedral Set ve Polihedral Huni:

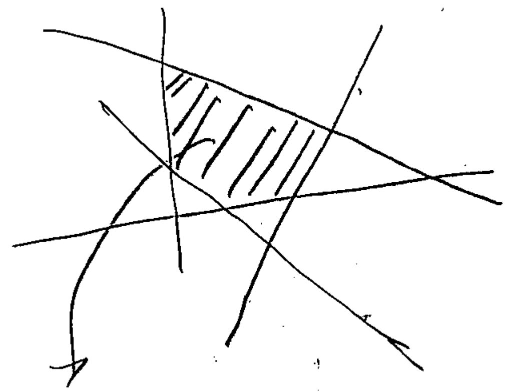
- Polihedral set ≡ yarım uzayların kesişimi

Yarım uzay;

$\{x : a_i x \le b_i\}$

$\{x : (1, -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 5\}$

$\{x : x_1 - x_2 \le 5\}$



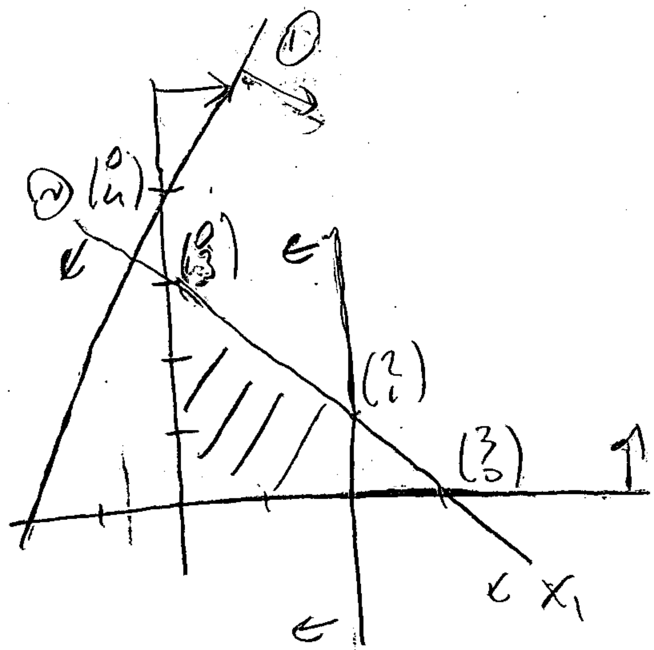
polihedral set.

Polihedral set $\equiv \{x : Ax \le b\}$ $A_{m \times n}$, x_n, b_m

↳ Bu tanım "=" eşitlik durumunu da içerir zira her eşitlik iki eşitsizlik olarak yazılabilir.

Ör:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 4 \quad (1)\\
x_1 + x_2 &\le 3 \quad (2)\\
x_1 &\le 2 \quad (3)\\
x_1 &\ge 0 \quad (4)\\
x_2 &\ge 0 \quad (5)
\end{aligned}
$$



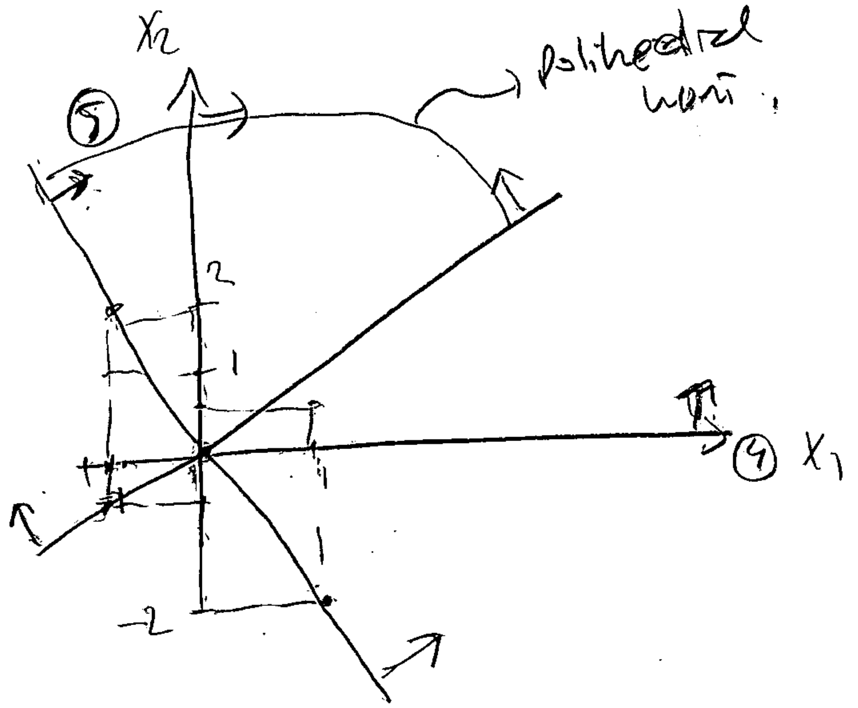
(1) kısıt bağlayıcı değil.
(not binding) (redundant)

– Polihedral huni; sıfırdan geçen yarı uzayların kesişimi

$C = \{x : Ax \leq 0\}$

<u>Örn:</u> $C = \{x : 2x_1 + x_2 \leq 0,\ -x_1 + 2x_2 \leq 0\}$

$x_2 = -2x_1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1}{2}x_1$



2.6 POLIHEDRAL SETLERDE UÇ NOKTA, YÜZ, YÖN ve

<u>Uç Yön:</u>

Polihedral set $X = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ ile ele alalım; $A_{m \times n}$, x_n, b_m. Bu set $m+n$ eşitsizlik tarafından tanımlanmıştır. Her hangi bir DP'nin durlu bölgesi bu forma getirilebilir

UÇ NOKTALAR ;

- Eğer polihedral $m+n$ hiper düzlemce tanımlanmış ise, $\bar{x} \in X$ bir uç nokta olması $\bar{x}$'in n tane doğrusal bağımsız sınırlayıcı hiper düzlem üzerinde olması demektir (sınırlayıcı ≡ n hiper düzlem beraber seti sınırlar anlamında)

≡ $\bar{x}$ noktası X setinde herhangi iki noktanın katı konveks kombinasyonu olarak yazılamaz.

İspat (By contradiction). $x', x'' \in X$ iki farklı nokta ve $\bar{x} = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ $0<\lambda<1$ olduğunu varsayalım. Bu ancak x' ve x'''ın da n bağımsız hiper düzlem üzerinde olması ile mümkündür. Çünkü ;

- Bu n hiper düzlem set $\alpha_{n \times n}$ olsun.

$\alpha\bar{x} = \beta_n$ dır.

- $x', x'' \in X$ olduğunda

$\alpha x' \leq \beta$ ve $\alpha x'' \leq \beta$ dır fakat $\alpha x = \beta \Rightarrow \alpha(\lambda x' + (1-\lambda)x'') = \beta$

$\Rightarrow \lambda \underbrace{\alpha x'}_{\leq \beta} + (1-\lambda)\underbrace{\alpha x''}_{\leq \beta} = \beta \qquad 0<\lambda<1$

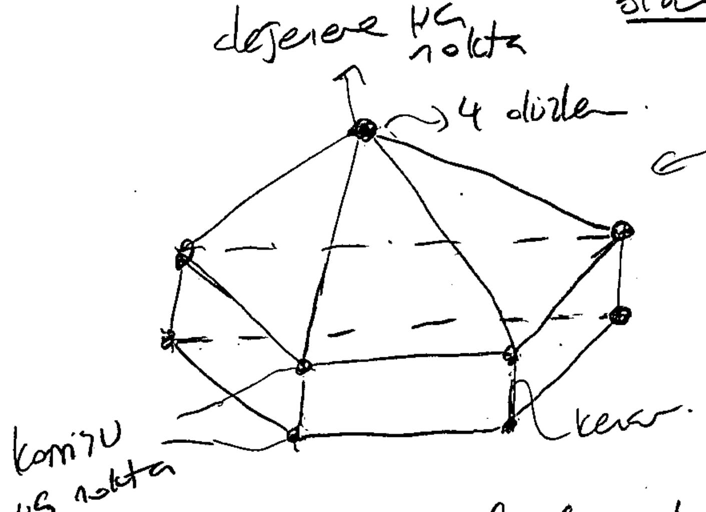
- bu ancak $\alpha x' = \beta$ ve $\alpha x'' = \beta$ iken mümkün

- $\alpha_{(n \times n)}$ n bağımsız eşitlikten (hiperplane) oluştuğundan çözümü tektir. Yani;

$\bar{x} = x' = x''$ olur

$\Rightarrow \bar{x}$ iki farklı noktanın konveks komb. olarak yazılamaz.

<u>Uç Nokta $\equiv$ n bağımsız hiper düzlem üzerinde olan nokta</u>



← Polihedral : $n=3$ (x_1, x_2, x_3)

$\Rightarrow$ 3 hiper düzlemin kesişimi her nokta uç nokta.

- Eğer n'den fazla hiperdüzlem bir uç noktada sağlanıyorsa buna dejenere uç nokta denir.

$\Rightarrow$ yukarıdaki örnekte dejenere uç çözüm var ancak gereksiz bir hiperdüzlem (kısıt) yok!!

* Yüz (F); X'i Formülleyen hiper düzlemlerin bir subsetini sağlayan noktalar kümesi
(facet)

[illegible] düzlem seti.

r(F) = F deki [illegible]

— $n - r(F)$ 'ye F'nin <u>boyutu</u> denir.

— <u>uç nokta</u> için $r(F) = n$ dir.

$\Rightarrow n - r(F) = 0$ olan yüze uç nokta denir.
(boyutu sıfır olan yüz)

— <u>kenar için</u> $r(F) = n - 1$ dir.

$\Rightarrow n - r(F) = 1$ boyutu 1 olan yüz.

— İki uç nokta <u>komşudur</u> eğer iki uç noktayı birleştiren doğru bir kenar ise.

<u>GEKME YÖNÜ VE UÇ YÖNLER;</u>