CH6 Dualite ve hassasiyet analizi.

- Her DP modeliyle ilgili ve DP'yi çözerken çözmüş olduğumuz başka bir DP vardır. Buna dual problem denir
  - Dualin çözerek orijinal problemi çözmüş oluruz. (primal problem)
  - Dualin çözümü primal problemle ilgili bilgileri barındırır.

Dual problemin formulasyonu;

- Dual modelde primal modeldeki her kısıt için bir değişken, her değişken için bir kısıt olur.

Kanonik formda:

Primal		Dual	
Min CX	n değişken, m kısıt	Max Wb	n kısıt, m değişken
s.t.		s.t.	
$AX \geq b$		$WA \leq C$	(W satır vektörü)
$X \geq 0$		$W \geq 0$.	

standard formda:

Primal	Dual
Min CX	Max Wb
s.t.	s.t.
$AX = b$	$WA \leq b$
$X \geq 0$	W unrestricted.

Primal dual model ilişkileri:

Primal (Dual)		Dual (primal)	
Min	$\longleftrightarrow$	Max	
Değişken ≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	Kısıt
Değişken ≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	Kısıt
Değişken kısıtsız	$\longleftrightarrow$	$=$	Kısıt
Kısıt $\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	Değişken
Kısıt $\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	Değişken
Kısıt $=$	$\longleftrightarrow$	kısıtsız	Değişken

Örn 6.3

Primal

Max $8x_1 + 3x_2 - 2x_3$

s.t.

$w_1 \rightarrow \quad x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2$

$w_2 \rightarrow \quad 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4$

$x_1 \leq 0, \; x_2 \geq 0,$

x_3 kısıtsız

Dual

Min $2w_1 - 4w_2$

s.t.

$w_1 + 5w_2 \leq 8 \quad \leftarrow x_1$

$-6w_1 + 7w_2 \geq 3 \quad \leftarrow x_2$

$w_1 - 2w_2 = -2 \quad \leftarrow x_3$

$w_1 \leq 0, \; w_2$ kısıtsız

6.2 Primal – Dual ilişkileri

Amaç değerleri ilişkisi;

$x_0 \rightarrow$ primal mümkün bir çözüm (min prb)

$w_0 \rightarrow$ dual " " " (max prb).

$AX_0 \geq b$, $X_0 \geq 0$ ve $W_0 A \leq C$, $W_0 \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} W_0 (AX_0 \geq b) \Rightarrow W_0 A X_0 \geq W_0 b \\ (W_0 A \leq C) X_0 \Rightarrow W_0 A X_0 \leq C X_0 \end{array}\right\} CX_0 \geq W_0 b.$$

Bu zayıf dualite özelliğidir; primal modelin (min) her hangi bir mümkün çözümünün amaç değeri dual model (max) için mümkün herhangi bir çözümün amaç değerinden büyük eşittir.

$\Rightarrow$ Dual mümkün herhangi bir çözüm, primal opti çözüm için bir alt sınır olur.

$\Rightarrow$ primal " " " " dual opt. çözüm için bir üst sınır olur.

Örn 6.1'deki modelde;

$X_0 = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $W_0 = [2, 0]$ mümkün çözümlerdir

$CX_0 = \frac{42}{5} = 8.4$ $W_0 b = (2, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 8$

$[8, 8.4]$ ⇝ primal opt. çözüm bu aralıkta olmak zorundadır. (Dual opt. de aynı aralıkta)

Corollary 6.1 (çıkarım)

Eğer $CX_0 = W_0 b$ ise X_0, ve W_0 kendi problemleri için optimal çözümlerdir.

Corollary 6.2

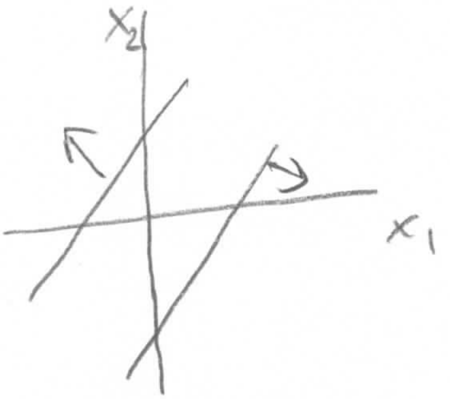
Eğer primal problemin sınırsız çözümü varsa (unbounded opt. solution) dual prb. mümkün çözümü yoktur. Yada dual prb. in sınırsız çözümü var ise primal problemin bir mümkün çözümü yoktur.

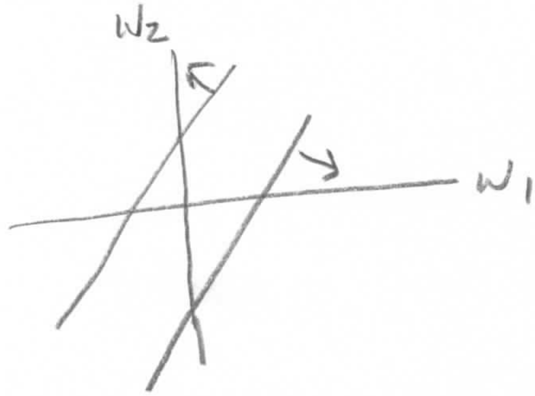
Ancak bir problemin çözümü yok ise bu diğer problemin sınırsız çözümü olduğunu göstermez. Aşağıdaki örneğe bakalım;

Örn 6.4

P: $\min -x_1 - x_2$
s.t.
$x_1 - x_2 \geq 1$
$-x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1, x_2 \geq 0$

D: $\max w_1 + w_2$
s.t.
$w_1 - w_2 \leq -1$
$-w_1 + w_2 \leq -1$
$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$





P: mümkün çözüm yok $\longrightarrow$ D: mümkün çözüm yok.

Dualitenin temeli ve KKT şartları:

Min cx s.t. $Ax \geq b$, $x \geq 0$ modeline x^* bir optimal çözüm ise aşağıdaki sistemin w^* gibi bir çözümü olmalıdır

1. $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$
2. $w^*A \leq c$, $w^* \geq 0$
3. $w^*(Ax^* - b) = 0$, $(c - w^*A)x^* = 0$

1. şart primal olurluluk şartı

2. şart $\Longrightarrow$ $w^*A \leq c$; $wAx^* \leq cx^*$
$\geq b$ $\Rightarrow$ $wb \leq cx^*$

(≡ eldeki opt. çözümün dual olurluluk şartlarını sağlaması anlamına gelir.)

tüm mümkün dual çözüm ≤ primal opt. çözümler

3. şarttan (complementary slackness)

$$\left.\begin{array}{l} w^*Ax^* = w^*b \\ cx^* = w^*Ax^* \end{array}\right\} \Rightarrow cx^* = w^*b$$

[Dolayısıyla w^*'ın dual optimal çözüm olması gerekir. (herhangi bir dual çözüm için $wb \leq cx^*$ olduğunu biliyoruz)]

- KKT şartları sağlayacak w^* bulmak için aşağıdaki problemi yazabiliriz! -

$$\left.\begin{array}{l} \max\ wb \\ \text{s.t.} \\ wA \leq c \\ w \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Bu da modelin dualidir}$$

Lemma 6.3 = Eğer bir problemin opt. çözümü var ise her iki problemde de opt. çözümü vardır. ve bu çözümler birbirine eşittir.

Temel dualite teoremi;

Tanım; Homojen dual problem (HD)

$$P: \min cx \quad s.t. \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad HD: \max wb \quad s.t. \quad wA \leq 0, \quad w \geq 0$$

- HD'nin dualinin mümkün alanı $\equiv$ P'nin mümkün alanı

- HD'nin $w=0$ olan bir mümkün çözümü her zaman vardır.

* Eğer HD sınırsız ise P probleminin mümkün çözümü yoktur.

* Eğer P'nin mümkün çözümü yoksa HD'nin mümkün çözümü yoktur yada sınırsızdır. Ancak HD'nin mümkün çözümü olduğunu biliyoruz $\Rightarrow$ HD sınırsızdır.

Corollary 6.3 Primal problemin, ancak ve ancak HD si sınırsız ise mümkün çözümü yoktur. (tersside geçerli)

Primal dual ilişkileri ;

P optimal ⇒ D optimal

P sınırsız ⇒ D mümkün çözüm yok (M.Ç.Y)

P mümkün çözüm yok ⇒ D sınırsız yada M.Ç.Y.

P M.Ç.Y. ⇐⇒ HD sınırsız
(ancak ve ancak)

Tamamlayıcı Boşluk özelliği ve süpervayzır prensibi ;

* Bir çözümün opt. olup olmadığını kontrol etmenin en basit yolu $cx = wb$ şartının kontrol etmektir. Optimalliği kontrol etmenin bu basit yoluna süpervayzır prensibi denir.

* KKT şartlarına göre başka bir süpervayzır prensibi : Tamamlayıcı Boşluk özelliğini (3. şart) kontrol etmektir. ;

① $cx^* = w^*b$ sağlanması demek ;

$\Rightarrow (c - w^*A)x^* = w^*(b - Ax^*)$

$\Rightarrow (c - w^*A)x^* + w^*(Ax^* - b) = 0$ ①

① şartı ancak ve ancak tamamlayıcı boşluk özelliği sağlanıyorsa sağlanır çünkü;

$w^* \geq 0$, $Ax^* - b \geq 0$, $c - w^* A \geq 0$ ve $x^* \geq 0$ dır.

① $w^*(Ax^* - b) = 0 \Rightarrow w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 \quad i = 1 \dots m.$

② $(c - w^* A) x^* = 0 \Rightarrow (c_j - w^* a_j) x_j = 0.$

→ Her hangi bir primal, dual çözüm çifti (x^*, w^*) bu iki şartı sağlıyorsa, iki çözümde kendi problemleri için optimaldir (Teorem 6.2)

$a^i x - b = x_{n+i} \quad i = 1, \dots m$ primal model boşluk değişkenleri

$c_j - w a_j = w_{m+j} \quad j = 1, \dots, n$ dual model boşluk değişkenleri

$$\boxed{\begin{aligned} &① \; w_i^* \cdot x_{n+i}^* = 0 \\ &② \; x_j^* \cdot w_{m+j}^* = 0 \end{aligned} \Bigg\} \text{ Tamamlayıcı boşluk teoremi}}$$

optimal çözümde bir problemdeki boşluk değişkenlerini diğer problemdeki değişkenlerle ilişkilendirir.

Duali kullanarak primalin çözülmesi ;

Örn: 6.5

$$P: \text{Min } 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

s.t.

$$x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 \geq 4$$

$$2x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

$$D: \text{Max } 4w_1+3w_2$$

s.t.

$$w_1+w_2 \leq 2$$

$$w_1-2w_2 \leq 3$$

$$2w_1+3w_2 \leq 5$$

$$w_1+w_2 \leq 2$$

$$3w_1+w_2 \leq 3$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

* Dual problemi grafiksel olarak çözebiliriz.

ve çözüm $w_1^* = 4/5$ $w_2 = 3/5$ obj $= 5$.

$\Rightarrow$ primal opt. obj $= 5$ olmalı

$\Rightarrow$ Tamamlayıcı boşluk teoreminden yararlanırsak.

$* \; x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ (x_2, x_3, x_4'e karşılık

gelen 2., 3. ve 4. dual kısıt optimal çözüm

için sınırlayıcı (tight) değil).

$* \; w_1^*, w_2^* > 0$ olduğundan primal optimal

çözümde ilgili kısıtlar (tight) sınırlayıcı

olmalı

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1^* + 3x_5^* &= 4 \\ 2x_1^* + x_5^* &= 3 \end{aligned}\right\} \; x_1^* = 1, \; x_5^* = 1$$

6.3 Dual'in Ekonomik Yorumu :

* Aşağıdaki üretim maliyet minimizasyon problemini ele alalım;

$$\text{ÜM: } \text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i=1\ldots m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1\ldots n$$

$b_i \rightarrow$ i. ürün talebi

$x_j \rightarrow$ i. ürünü çıktısı veren j aktivitesi

(örn: j departmanı çalışma saati, j makinası çalışma günü, j ayındaki çalışan sayısı v.b.)

$a_{ij} \rightarrow$ 1 birim j aktivitesinin ürettiği i çıktısı

$c_j \rightarrow$ 1 " " " birim maliyeti.

* Daha önce gördüğümüz üzere;

$$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j = w^* b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

$$\text{optimalde} \rightarrow \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = c_B B_i^{-1} = w_i^*$$

$w_i^* \rightarrow$ optimal objektif değerinin b_i'deki 1 birim değişim durumunda ne kadar değişeceği. b_i 1 birim arttığında (azaldığında)

- eğer $w_i^* > 0 \Rightarrow z^*$ artar (azalır)
- eğer $w_i^* < 0 \Rightarrow z^*$ azalır (artar)

$w^* \equiv$ sağ taraf vektörünün "gölge fiyatları" olarak isimlendirilir. $\equiv$ sağ tarafı 1 birim arttırmak için "ne kadar ödemeye razı olacağımız" (shadow prices)

* Bir önceki üretim maliyet minimizasyonu modeli aktivite seviyelerini (x_j) optimal şekilde belirler.
  - Bu aktivite seviyelerini opt. olarak belirleme yerine, firmaya bizim ödememiz için her çıktıya bir birim fiyat belirlemesini ($w_1, w_2 \ldots w_m$) isteyelim.

$$\text{firmanın alacağı ödeme} = \sum_{i=1}^{m} w_i b_i$$

  - Firmanın fiyatları belirlerken isteyeceğimiz kısıt fiyatların adil olması

- Adil olması;

Her bir aktivite'ye karşılık gelen fiyat

≤ o aktivitenin birim maliyeti

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i}_{} \leq c_j \quad j=1,2,\dots n.$$

Aktivite j'ye karşılık gelen fiyat

(Her aktivitenin fiyatı maliyetinden az olacak)

Dolayısıyla firmanın çözeceği model;

$$G: \quad \max \sum_{i=1}^{m} w_i b_i \quad (\text{maximum getiri}).$$

s.t.

$$\sum a_{ij} w_i \leq c_j \quad j=1..n$$

$$w_i \geq 0 \quad i=1,\dots m.$$

- Baktığımızda Getiri modelinin, üretim maliyet modelinin dualı olduğunu görürüz.

- Optimalde (min aktivite maliyeti = maximum aktı getiri) olan bir çözüme ulaşılır.

optimal aktivite seviyelerinin belirlenmesi ≡ optimal aktı fiyatlarının belirlenmesi

- optimalde, tamamlayıcı boşluk teoreme göre.

  - Eğer $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i \Rightarrow w_i^* = 0$.

    - i çıktısının üretimi zaten b_i'den fazla dolayısıyla i çıktısını 1 birim artırmanın maliyet $w_i^* = 0$.

  - Eğer $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i^* < c_j \Rightarrow x_j^* = 0$

    - j aktivitesiyle üretilen ürünlerin toplam getirisi j aktivitesi birim maliyetinden az ise j aktivitesi değeri sıfır olmalı ($x_j^* = 0$)

* Primal ve Dual modellerin rollerinin değişimi ve tekrar yorumu:

Primal model: ürün-karışımı modeli

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1..m \quad (m \text{ kaynak})$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1..n \quad (n \text{ ürün})$$

x_j: # of units of product j produced

$$D: \quad \text{Min} \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq c_j \quad j=1..n$$

$$w_i \geq 0 \quad i=1..m$$

w_i = i. kaynağın gölge fiyatı (shadow price, imputed value, market price/rent)

Amaç = üretici kaynaklarını üretimde kullanmak yerine satsa/kiralasa elde edeceği getiri.

Kısıtın yorumu;

j ürünün üretiminde kullanılan kaynaklardan elde edilen getiri $\geq$ j ürünün birim getirisi (aksi takdirde kaynakları kullanıp 1 birim j ürünü üretmek daha karlı olurdu.

Amaç minimizasyon çünkü bir adil ("fair") fiyat istiyoruz. Aksi takdirde mak. olsa idi $w_i \to +\infty$ olurdu.

- Dualiteye göre ;

Üretimle elde edilecek optimal getiri

= kaynakları satmakla/kiralamakla elde edilecek getiri

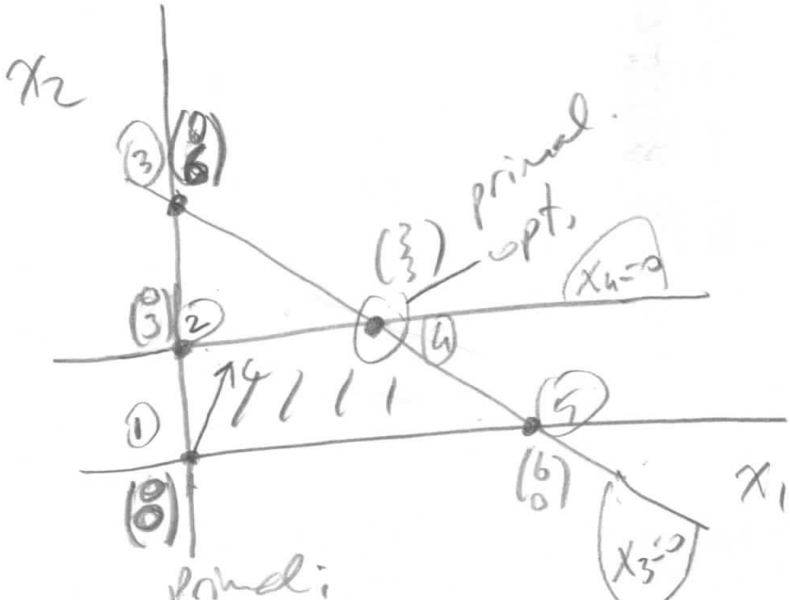
Eğer $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \Rightarrow w_i^* = 0$

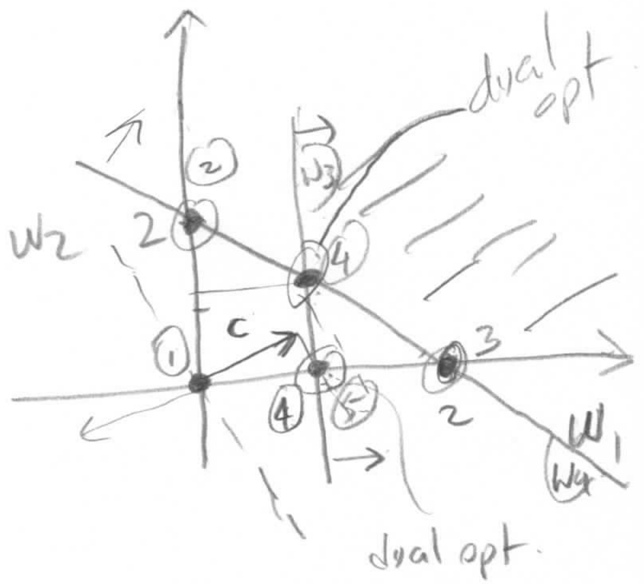
- Bir kaynak tamamen kullanılmamışsa, o kaynağı 1 birim artırmanın getirisi sıfır.

Eğer $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i > c_j \Rightarrow x_j^* = 0$

- Bir birim j ürünü üretmek için gerekli kaynakların maliyeti, getirisinden fazla ise, o ürünün üretimi sıfırdır.

Primal ve Dual temellerin eşlenikliği:





Primal:

$\max \; x_1 + 2x_2$

s.t.

$w_1 \quad x_1 + x_2 \le 6 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$w_2 \quad x_2 \le 3 \quad x_2 + x_4 = 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

Dual:

$\min \; 6w_1 + 3w_2$

$x_1 \quad w_1 \ge 1 \quad w_1 - w_3 = 1$

$x_2 \quad w_1 + w_2 \ge 2 \quad w_1 + w_2 - w_4 = 2$

$w_{1,2} \ge 0$

- $B = [a_3, a_4]$ ① → primal temel.

Primal olurlu

$x_3 = 6, \; x_4 = 6$

$x_1 = x_2 = 0$.

Tamamlayıcı boşluk teoremi (T.B.T.)

Dual olursuz

$x_3 \cdot w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \Rightarrow -w_3 = 1$

$x_4 \cdot w_2 = 0 \quad w_2 = 0 \quad -w_4 = 2$

$\boxed{\begin{array}{l} w_3 = -2 \\ w_4 = -2 \\ w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \end{array}}$

$-B = [a_2 \ a_3]$ 2 → primal temel

$x_2 = 3 \quad x_3 = 3$ } primal olurlu.

$x_4 = x_1 = 0$

Tamamlayıcı boşluk teoremi :

$x_2 \cdot w_4 = 0$
$x_3 \cdot w_1 = 0$ } $\Rightarrow$ $w_4 = w_1 = 0$. $-w_3 = 1$
$\Rightarrow w_2 = 2$.

$w_3 = -1$
$w_2 = 2$
$w_1 = w_4 = 0$. } dual olursuz

$-B = [a_2, a_4]$ 3

$x_2 = 6 \ , \ x_4 = -2$
$x_1 = x_3 = 0$ } primal olursuz.

<u>T. B. T.</u>

$x_2 . w_4 = 0 \Rightarrow w_4 = 0$.
$x_4 . w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 0$ } $w_1 = 2$.
$w_3 = 1$

$-B = [a_1, a_2]$ 4

$x_1 = 3 \ , x_2 = 3$

$x_3 = x_4 = 0$.

TBT

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot w_3 = 0 \\ x_2 \cdot w_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} w_3 = 0 \\ w_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \end{array}\right\} \text{ dual olurlu.}$$

$z_p = 9 \quad z_D = 9$

— $B_D = [a_1, a_4]$ ← dual temel. 5

$w_1 = 1,\ w_4 = -3$ } dual olursuz

$w_2 = w_3 = 0$.

TBT

$$\left.\begin{array}{l} w_1 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_2 \cdot w_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_4 = 3 \end{array}\right\} \text{ primal olurlu}$$

$z_p = 6 \quad z_D = 6$

primal optimalde $w^* = c_B B^{-1}$ optimal dual çözümü verir.

$w_i = -(z_{n+i} - c_{n+i}) = -z_{n+i}$ $\quad i = 1, 2, \dots m$ dir.

primal ~~fiz~~ optimalite ~~olurluluk~~ şartı $z_j - c_j \le 0$, dual olurluluk şartı $WA \le c$, $w \ge 0$ ya eş değerdir.

göz ardı et

$\boxed{\text{DUAL SIMPLEKS}}$

→ sağ taraf negatif olduğunda ($b_i \le 0$ her sene i), başlangıç çözümü bulmakta problem yaşadık. (yapay değişkenler)

→ Dual simpleks dual problemi primal simpleks tablosu kullanarak çözer.

→ primal mümkün çözümün kolay görülemediği durumlarda ($b_i \le 0$), dual mümkün bir çözüm görülebilir.

→ Dual simplex metod dual feasibility'yi ve tamamlayıcı boşluk şartını koruyarak, primal feasibility'i elde etmeye çalışır.

Dual simplekste ilgili bir ek kısım ;

– Dual simplekste tabloya girecek kolon aşağıdaki min oran testiyle belirlenir ;

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \; ; \; y_{rj} < 0 \right\}$$

sıfır satırındaki pivot operasyonu sonrası değerler

$$(z_j - c_j)' = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$$

– Eğer $y_{rj} \geq 0$ ise $\frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \leq 0$ dır.

$(y_{rk} < 0 \, , \; z_k - c_k \leq 0)$.. Çözüm dual durlu (primal opt.) olduğundan $z_j - c_j \leq 0$ dır.

$$\Rightarrow (z_j - c_j)' \leq 0 \text{ olur}$$

– Eğer $y_{rj} < 0$ ise ;

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \quad \text{(min oran testi nedeniyle)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(z_k - c_k)\, y_{rj} - (z_j - c_j)\, y_{rk}}_{(z_j - c_j)'} \leq 0$$

$(z_j - c_j)' \leq 0$ olur.

— Pivot sonrası dual obj değeri:

$$= c_B B^{-1} b - \frac{(z_k - c_k)\,\bar{b}_r}{y_{rk}} = wb - \frac{(z_k - c_k)\,\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$(z_k - c_k) \leq 0$, $\bar{b}_r < 0$ ve $y_{rk} < 0$ olduğundan

dual objectif (maximizasyon) iyileşmiş olur.

⇒ Dolayısıyla dual olurlu bir çözümden, daha iyi bir dual olurlu çözüme geçmiş oluruz.

* Eğer tüm $y_{rj} \geq 0$ ise (girecek bir kolon yok)

- Bu durumda satır:

$$\sum_{j=1}^{n+m} y_{rj} x_j = \bar{b}_r \quad \text{olur.}$$

($\bar{b}_r < 0$, $y_{rj} \geq 0$ ve bir olurlu çözümde x_j'ler ≥ 0 olmak zorunda) ≡ olurlu bir primal çözüm yok ⇒ Dual sınırsızdır.

Örnek 6.7

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Dual olurlu bir mümkün çözüm x_4 ve x_5 'i kullanarak elde edilir.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	-2	1	-3	0	1	-4

primal olurluluk şartı

Burada $z_j - c_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \ldots 5$ dual olurlu bir çözümdür $(z_j - c_j \leq 0 \Rightarrow WA \leq C, \ W \geq 0)$

Dual simplexte hangi dual değişkenin temel gireceğine karar vereceğiz bu primalde hangi satırın temelden çıkacağına karar vermek olacaktır. Dual değişken pozitif değer alıyorsa, ona karşılık gelen kısıt eşitlik olmalı (o kısıtın slack değişkeni $=0$ olmalı)

Bu tablo primal olurlu bir çözüm değildir. Çünkü bazı $b_i < 0$. Primal olurlu hale dönüştürmek için en fazla negatif satırı tabandan çıkartmaya çalışacağız.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	-2	1	-3	0	1	-4
oran		$-2/-2=1$		$-4/-3=1{,}33$			

← en negatif (r)

Hangi değişken tabana girecek. Dual opti korunmalı ($z_j - c_j \le 0$ kalmalı). [Herhangi bir kolon k seçtiğimizde (y_{rk}), yeni $(z_j - c_j)'$ pivotlamadan sonra;

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \text{ olur.}$$

$-\dfrac{(z_k - c_k)}{y_{rk}}$ → bu pivotlamada kullanacağımız "sıfır satırı için) çarpandır.

$$\left((z_k - c_k) - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \cdot y_{rk} \right) = 0$$

minimum oran testi;

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;;\; y_{rj} < 0 \right\}$$

- Çıkan satırda negatif değerli y_{rj}'lerden bu oranı minimum yapanı seç.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	-4	-1	0	-1	4
x_4	0	0	$-5/2$	$1/2$	1	$-1/2$	-1
x_1	0	1	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	2
					w_1	w_2	
z	1	0	0	$-9/5$	$-8/5$	$-1/5$	$28/5$
x_2	0						$2/5$
x_1	0						$11/5$

$(w_1, w_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - (0,0)$

$w(-I_2) - 0$

$= (-w_1, -w_2)$

$w a_j - 0 = -w$

$\Rightarrow$ opt

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (11/5, 2/5, 0, 0)$

$(w_1^*, w_2^*) = (8/5, 1/5) \rightarrow$ x_3, x_4 için obj satırı değerlerinin tersi

optimal dual solution

$(w(-I) - 0)$

$= -w \rightarrow x_3, x_4$ sıfır satırı katsayıları