Simplex Metodu (ch3)

Uç çözümler ve optimalite ;

Teorem; Eğer bir optimal çözüm var ise, bir optimal uç nokta çözüm de vardır.

İspat : Aşağıdaki DP'yi ele alalım

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots x_K$ bu D.P. için uç noktalar olsun.

$d_1, d_2, \ldots d_\ell$ " " " uç yönler olsun.

Olurlu bölgedeki her nokta $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j d_j$, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$ $j=1,\ldots,k$ ve $\mu_j \geq 0$ $j=1\ldots\ell$. Bu x tanımını yukarıdaki DP'yi temsil için kullanabiliriz;

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{k} (c x_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{\ell} (c d_j)\mu_j \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1\ldots k \\ & \mu_j \geq \quad j=1\ldots\ell. \end{aligned}$$

I. durum; eğer bazı $j=1,2..l$ için $cd_j < 0$ ise,

ilgili μ_j 'yi $+\infty$ a götürerek amacı istediğimiz kadar azaltabiliriz (amaç $-\infty$ 'a gider). Optimal çözüm sınırsızdır (unbounded opt. soln.)

II. durum; eğer tüm $j=1,2..l$ için $cd_j \geq 0$ ise; bu durumda opt. çözümde tüm μ_j 'ler sıfıra eşitlenir. Objektifteki λ_j li terimi $\sum_{j=1}^{k}(cX_j)\lambda_j$ minimize etmek için ise; minimum cX_j ye karşılık gelen $\lambda_j = 1$ yapılır ve diğer λ_j 'ler sıfırlanır.

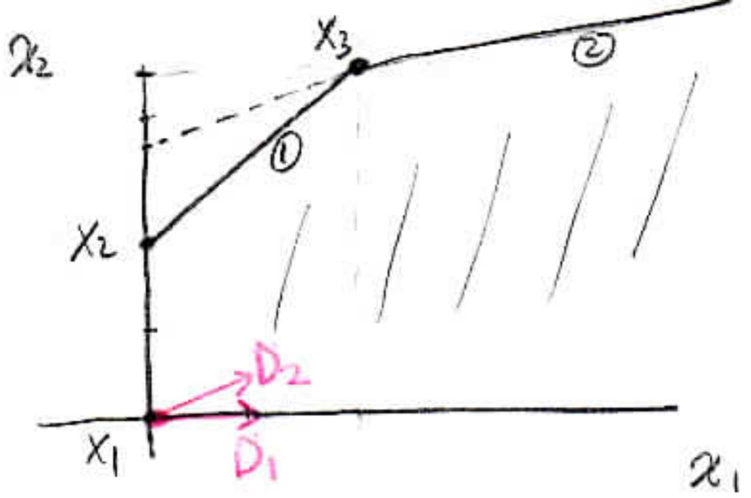
$\Rightarrow$ Bu çözümde $X = X_j$ yani uç noktalardan birisidir. (Tek opt. çözüm)

Eğer min cX_j birden fazla cX_j 'de oluşursa; bütün bu uç çözümler ve onların tüm konvek kombinasyonları optimaldir (alternatif opt çözüm)

İspatın sonu

Örn 3.1 Aşağıdaki seti ele alalım

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad \rightsquigarrow \quad Ax \leq b$$
$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



3 uç nokta ve 2 uç yön;

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ → uç noktalar.

Uç yönler;

$$\left.\begin{array}{ll} ① & -d_1 + d_2 \leq 0 \\ ② & -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ & d_1 \geq 0 \\ & d_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$ bu şartlar sağlanacak ve $D \neq 0$ olacak (yön vektörünün iki değeri de sıfır olmayacak)

$$\left.\begin{array}{ll} ① & d_2 \leq d_1 \\ ② & 2d_2 \leq d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2d_2 \leq d_1 \ , d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$$

$d_1 = 0$ alalım → $d_2 = 0$ olur ve yön olmaz.

$d_2 = 0$ alalım $\quad \underline{\underline{d_1}} \geq 2d_2$'den $d_1 = 1$ olsun.

$D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bir yön olur.

$d_1 = 1$ alalım $\quad d_1 \geq 2d_2$ den $d_2 = \frac{1}{2}$ olur.

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \equiv D_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Not: Bu örnekte normalizasyon yapılmamış. Öklid normuyla normalizasyon yapmış olsak

$$\sqrt{d_1^2+d_2^2}=1 \rightarrow d_1^2+d_2^2=1$$ kullanabilirdik.

Bu durumda: yönün kısıtları

$$D=\{(d_1,d_2): \underset{①}{d_1 \geq 2d_2},\ \underset{②}{d_1\geq 0},\ \underset{③}{d_2\geq 0},\ \underset{④}{d_1^2+d_2^2=1}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ①\ d_1-2d_2=0 \\ ④\ d_1^2+d_2^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1=2d_2 \\ (2d_2)^2+d_2^2=1 \quad 5d_2^2=1 \end{array}$$

$$d_2=\frac{1}{\sqrt5} \quad d_1=\frac{2}{\sqrt5}$$

$$D_1=\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \end{pmatrix}$$ olurdu.

② $d_1=0$

④ $d_1^2+d_2^2=1 \Rightarrow d_2=1$ ancak $d_1\geq 2d_2$ sağlanmaz.

yön değil.

③ $d_2=0$

④ $d_1^2+d_2^2=1 \Rightarrow d_1=1$ $d_1\geq 2d_2$ sağlanır.

$$D_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setin iki yönü (normalizasyon yapılmadan).

$$D_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I. Varsaılırsa: amaç fonksiyonu;

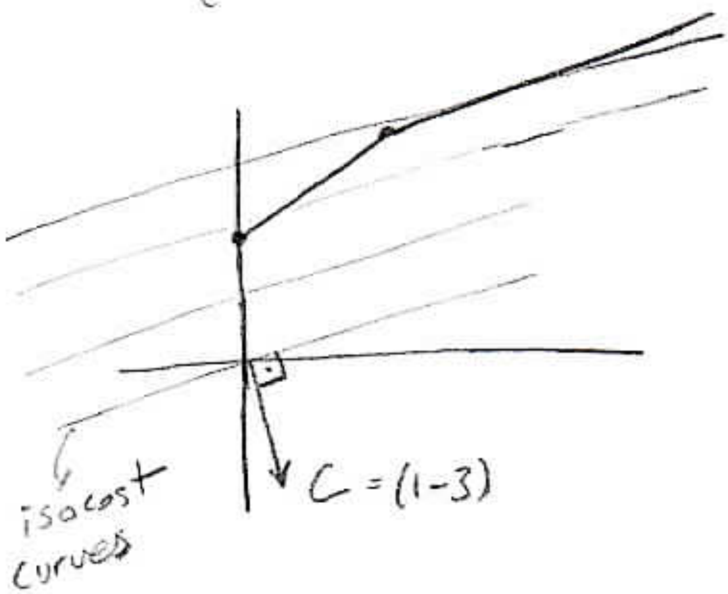
$$x_1 - 3x_2 \Rightarrow \text{yani } C = (1,-3) \text{ olur.}$$

(Cx_j)'ler;

$$Cx_1 = (1,-3)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \quad Cx_2 = (1,-3)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = -6 \quad Cx_3 = (1,-3)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = -10$$

(CD_j)'ler;

$$CD_1 = (1,-3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \qquad CD_2 = (1,-3)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -1$$



Problemi aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\text{Min. } 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 + \mu_1 - \mu_3$$

$$\text{s.t.}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$cD_2 = -1 < 0$ dır ve $\mu_2 = +\infty$ set edilir. opt çözüm sınırsız olur. $(-\infty)$. ($\mu_1 = 0$ alınabilir. λ_j lerde istenilen değerlere set edilir örn: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$)

Sınırsız optimal çözüm için gerek ve yeter şart; bazı $j = 1, 2 .. l$ için $cd_j < 0$ olmasıdır.

II. Şimdi amacımızın

$4x_1 - x_2$ olduğunu varsayalım

$c = (4, -1)$.

(cX_j)'ler ;

$cX_1 = (4 \; -1)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \quad cX_2 = -2 \quad cX_3 = 4$

(cD_j) ler :

$cD_1 = (4, -1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4 \quad cD_2 = (4, -1)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 7$

Model;

$\text{Min } 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\mu_1 + 7\mu_2$

s.t.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

$\mu_1, \mu_2 \geq 0$

- μ_1 ve μ_2 pozitif katsayıya sahip.

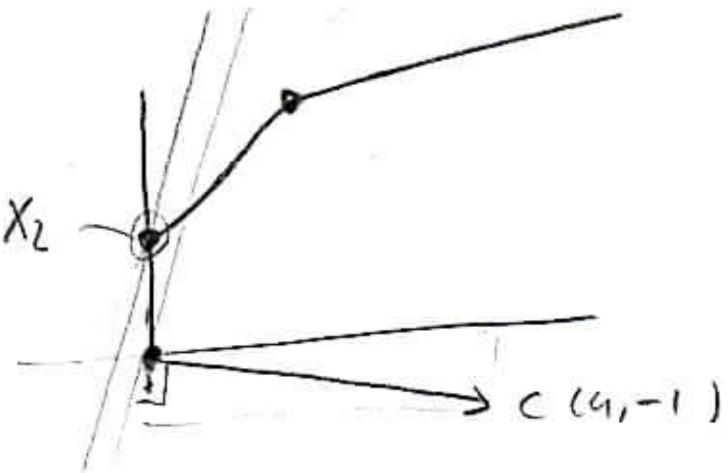
  $\Rightarrow$ opt. çözümde $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dır.

- Katsayısı en küçük $\lambda \equiv \lambda_2$.

  $\Rightarrow$ opt çözümde $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ olur.

  $\Rightarrow$ opt. çözüm λ_2'ye karşılık gelen X_2 dir.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



opt. çözüm $X = \underset{\downarrow \atop 0}{\lambda_1} X_1 + \underset{\downarrow \atop 1}{\lambda_2} X_2 + \underset{\downarrow \atop 0}{\lambda_3} X_3 + \underset{\downarrow \atop 0}{\mu_1} D_1 + \underset{\downarrow \atop 0}{\mu_2} D_2$

$X = X_2$

Temel Mümkün Çözümler
(Basic feasible solutions)

Tanım; $AX=b$, $X \geqslant 0$ ($A_{m \times n}$, b_m, X_n boyutlu) sistemini ele alalım ve $\text{rank}(A,b) = \text{rank}(A) = m$ olsun (m bağımsız satır (sütun)).

- Kolonları düzenleyerek;

- $A = [B, N]$, $B_{m \times m}$ ve $\text{rank}(B) = m$ (Bağımsız kolonlar)
  $N_{m \times n-m}$ (Bağımlı kolonlar)

- $X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$ X_B m vektör. Bağımsız kolonlara karşılık gelir.
  X_N $n-m$ vektör. Bağımlı kolonlara karşılık gelir.

$$AX=b \equiv [B, N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$$

$\Rightarrow BX_B + NX_N = b$ olur.

$\Rightarrow X_N = 0$ alır isek $BX_B = b \Rightarrow X_B = B^{-1} b$ elde edilir.

$\Rightarrow X_N = 0$ olan çözüme Temel Çözüm (basic solution) denir.

⇒ $X_N=0$ iken $X_B \geq 0$ olan çözüme de

<u>temel mümkün çözüm</u> (basic feasible solution)

denir. (Basic matrix or basis)

$B \rightarrow$ <u>temel</u> matris $N \rightarrow$ <u>temel olmayan</u> matris

$X_B \rightarrow$ <u>temel</u> değişkenler $X_N \rightarrow$ " " değişkenler

(Basic variables)

⇒ eğer $X_B > 0$ ise (sıfıra eşit bir temel değişken yoksa) <u>dejenere olmayan</u> temel mümkün çözüm denir

⇒ eğer X_B'deki bazı değişkenler sıfırsa <u>dejenere</u> mümkün çözüm olur.

DP'lerde kanonik ve standart formatlar;

<u>Kanonik format:</u>

Minimizasyonda : $AX \geq b$, $X \geq 0$

Maximizasyonda : $AX \leq b$, $X \geq 0$

<u>Standart format:</u> $AX = b$, $X \geq 0$ olan format. Simplex standard formatla çalışır.

Standard formata dönüştürme;

- $x_1+x_2 \cdots + x_n \leq b \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n+\underbrace{x_{n+1}}_{} = b$

$(x_{n+1} \geq 0)$

(slack variable)
Boşluk değişkeni

- $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq b \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n-\underbrace{x_{n+1}}_{} = b$

$(x_{n+1} \geq 0)$

(surplus varb.)
fazlalık değiş.

- Eğer bir değişken için "≥ 0" kısıtı yoksa; değişken sınırsız ise $[x \in (-\infty, +\infty)]$;

$$x = x' - x'', \quad x' \geq 0, \; x'' \geq 0$$ şeklinde

iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazılır.

Örn: 3.2 Aşağıdaki polihedral'i ele alalım;

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

standard formda;

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A: \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$
$$A: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} m&=2 \\ n&=4 \end{aligned}$$

Temel çözümler;

- Temel çözümlerin her biri 2x2 lik bir temel matrise (B) karşılık gelir.
- 2x2 lik B matrislerini, A matrisinden elde ederiz.
- A'dan aşağıdaki B matrisleri ve karşılık gelen çözümler elde edilir;

1. $B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_N = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Temel çözüm ve) Temel mümkün çözüm $(X_B \geq 0)$

(2x2 lik matrisin tersi;

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. $B = [a_1, a_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_N = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temel mümkün çözüm

3. $B=[a_2, a_3]$ $X_B=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=B^{-1}b=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $X_N=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

temel mümkün çözüm

4. $B=(a_2, a_4)$ $X_B=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ $X_N=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

temel çözüm ancak temel mümkün çözüm değil.

5. $B=[a_3, a_4]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_B=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $X_N=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $B=[a_3, a_4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⇝ Bu bir temel matris (basis) değildir, çünkü $rank(B)=1 \neq m=2$

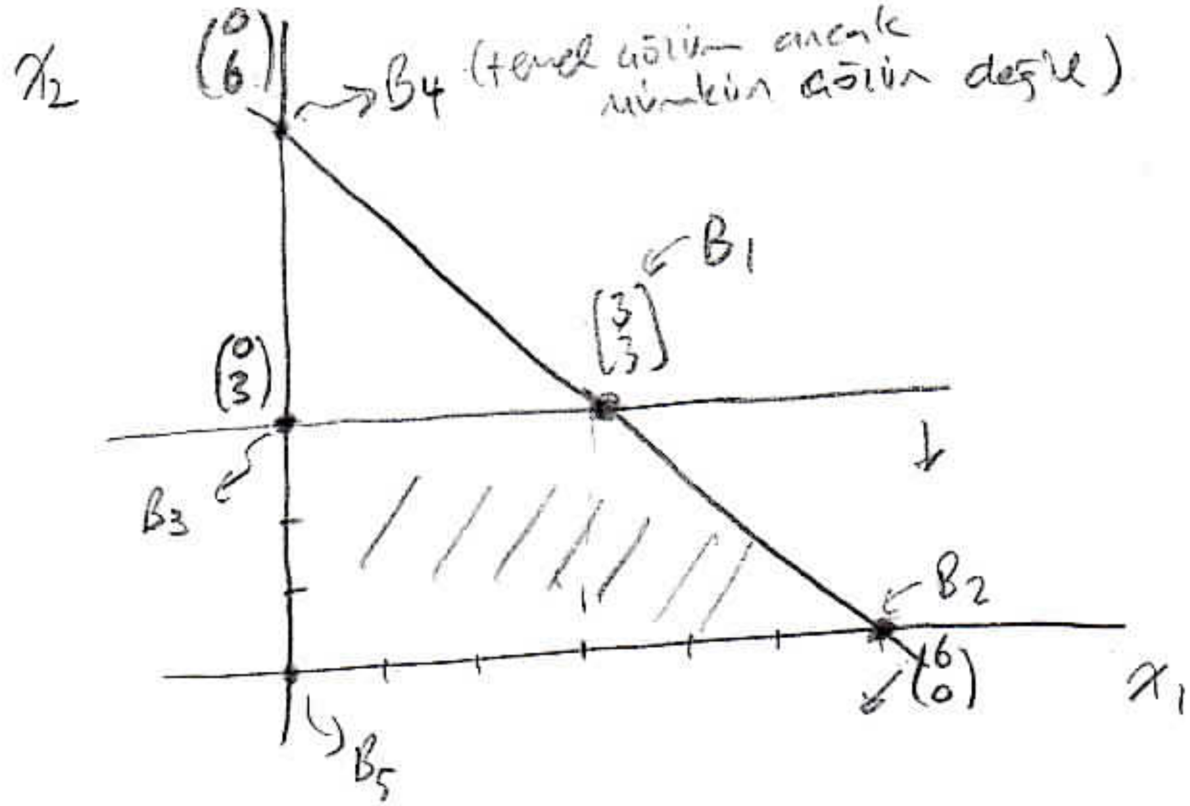
1,2,3,5 ⇝ Temel mümkün çözüm

4 ⇝ Temel çözüm.

Temel mümkün çözümler;

$$X_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

E^2'de (düzlemde) bu temel çözümlerin gösterimi;



$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ temel mümkün çözümler

Temel çözümlerin sayısı $\leq \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{n!(n-m)!}$

örnekte: $\binom{4}{2} = 6$, gerçekleşen ise 5 temel çözüm.

Temel mümkün çözümlere başka bir bakış;

- Her kısıt bir değişkenle ilişkilendirilebilir:

$x_1 \rightsquigarrow x_1 \geq 0$ kısıtıyla ilişkilendirelim.

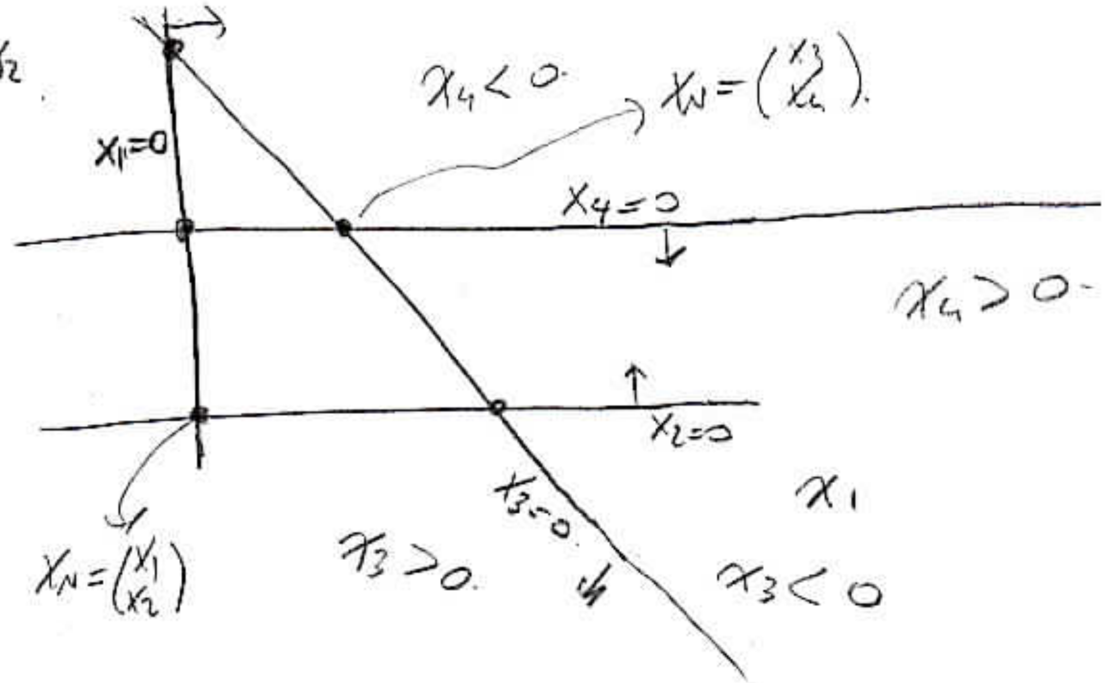
$x_1 = 0$ ise kısıt eşitlik olarak sağlanır
$x_1 \geq 0$ ise 〃 sağlanır
$x_1 < 0$ ise kısıt sağlanmamış olur.

$x_2 \rightsquigarrow x_2 \geq 0$ kısıtıyla aynı şekilde.

$x_3 \rightsquigarrow x_1 + x_2 \leq 6$ " " "

$x_4 \rightsquigarrow x_2 \leq 3$ " " "

Her değişken ilgili yarım uzayın sınırında sıfır değerini alır.



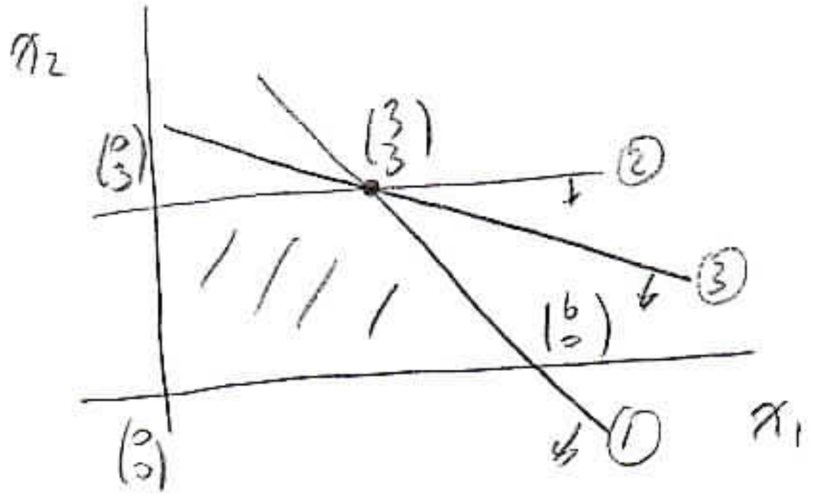
- Temel çözümler bu sınırların kesiştiği noktadadır.
  - ⇒ kesişen doğrular üzerinde sıfır değerini alan değişkenler temel olmayan, diğerleride temel değişkenlerdir.
  - ⇒ $x_4=0$ ve $x_2=0$ doğruları kesişmez ≡ x_1, x_3 temel oluşturamaz. (a_1, a_3)

Örn 3.3 Dejenere temel mümkün çözüm.

Aşağıdaki sistemi ele alalım;

$$\begin{array}{lll} ① & x_1 + x_2 \le 6 & \\ ② & x_2 \le 3 & \Rightarrow \\ ③ & x_1 + 2x_2 \le 9 & \\ & x_1,\ x_2 \ge 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 6. \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{array}$$

mümkün bölge:



$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = [a_1, a_2, a_3]$ 'e karşılık gelen T.M.Ç.'ye bakalım.
($m = 3 \Rightarrow B$ 3×3 matris olmalı)

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{B^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_N = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = [a_1, a_2, a_3]$ için

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ verir. Bu bir öncekiyle aynı çözüm dür ($x_3 = 0, x_5 = 0$).

Benzer şekilde. $B = (a_1\ a_2\ a_5]$ te

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ aynı çözümü verir. ($x_3 = 0, x_4 = 0$)

Bu temel mümkün çözüm dejeneredir, çünkü bir temel değişken sıfır değerine sahiptir. 3 temel aynı çözüme karşılık gelir.

- Burada 3. kısıt gereksiz (redundant) tır ve dejenerasyona neden olur.
- Dejenere durum sadece gereksiz kısıtlar neden olmaz. (Daha önce gördük)

Her uç nokta bir temel mümkün çözüm müdür?;

$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ setini ele alalım.

<u>Uç nokta çözüm</u> $\equiv$ n doğrusal bağımsız hiper düzlem üzerinde yer alan çözüm. X bu sistemi sağlayan bir uç nokta olsun.

$Ax = b \rightsquigarrow m$ doğrusal bağımsız eşitlik.

geriye kalan $p = n - m$ eşitlik

$X \geq 0$ belirleyici düzlemlerden gelir. Yani P tane $x_i = 0$ düzlemi. Bu P hiper düzlemde gelen eşitlikler;

$X_N = 0$ olsun.

Uç nokta çözüm bu durumda;

$AX = b$, $X_N = 0$ sisteminin çözümü devettir.

N, X_N in A'daki kolonları olsun;

$$AX = b \Rightarrow [B, N]\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

$$\Rightarrow B X_B + N X_N = b$$

$$X_N = 0 \Rightarrow X_B = B^{-1} b \geq 0$$

çünkü $X = (X_B, X_N)$ $AX = b$, $X \geq 0$ sağlayan bir uç noktadır.

$X_N = 0$, $X_B = B^{-1} b \geq 0$ ise bir temel mümkün çözümü gösterir. Sonuç:

<u>Uç noktalar birer temel mümkün çözümdür.</u>

<u>Teorem 3.3</u> Eğer optimal bir çözüm varsa, optimal bir uç nokta çözüm (ve buna eşdeğer optimal temel mümkün çözüm) vardır.

3.3 Simplex metodunun anahtarı ;

(key to the simplex method)

Anahtar; Lokal olarak optimal olan bir uç nokta çözüm global olarak da optimaldir. (Lokal optimal ≡ kendinden daha iyi bir komşu uç nokta çözüm yok)

Aşağıdaki DP'yi ele alalım:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } cx \\ \text{s.t.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

$A_{m \times n}$ ve $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ bir t.m.ç. olsun, bu çözümün amaç değeri de z_0 olsun;

$$z_0 = c\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = (c_B, c_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B B^{-1} b \qquad (3.1)$$

- x_B, x_N ; temel ve temel olmayan değişkenler

$$\left.\begin{array}{l} x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0 \text{ ve} \\ b = Ax = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N \end{array}\right\} \text{kısıtlar gereği}$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$
$$= B^{-1}b - \sum_{j \in R} \underbrace{B^{-1}a_j}_{} x_j$$
$$= \bar{b} - \sum_{j \in R} y_j x_j \quad (3.2)$$

$R \equiv$ mevcut çözümdeki temel olmayan değişkenlerin seti

Problemin herhangi bir çözümü X olsun:

$$
\begin{aligned}
z &= cX \\
&= C_B X_B + C_N X_N \\
&= C_B\left(B^{-1}b - \sum_{j\in R} B^{-1}a_j x_j\right) + \sum_{j\in R} C_j x_j \\
&= C_B B^{-1} b - \sum_{j\in R}\left(C_B B^{-1} a_j - C_j\right) x_j \\
&= z_0 - \sum_{j\in R}\left(z_j - C_j\right) x_j \qquad \left(z_j = C_B B^{-1} a_j\right)
\end{aligned}
$$

Bunu kullanarak DP'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\text{Min } z = z_0 - \sum_{j\in R}(z_j - C_j)x_j$$

s.t.

$$\sum_{j\in R} y_j x_j + X_B = \bar{b}$$

$$x_j \geq 0 \quad j\in R \quad \text{ve} \quad X_B \geq 0$$

Problemi bir temel çözüme göre tekrar formüle etmiş olduk. Burada X_B'leri "boşluk" değişkeni olarak değerlendirirsek, problemin formülasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\text{Min } z = z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

s.t.

$$\sum_{j \in R} y_j x_j \leq \bar{b}$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in R$$

Burada R setinde (temel olmayan değişkenler) $p = n - m$ tane değişken vardır. Yani bir DP'yi n boyut yerine p boyutlu hale getirmiş olduk p boyuta indirgenmiş olduk. Bu beklenebilecek bir şey çünkü; p tane temel olmayan değişkenin aldığı her değere karşılık gelen temel değişken değerleri bulunur.

$-(c_j - z_j)$ ~> temel olmayan değişkenlerin katsayıları.

Bu katsayılar p boyutlu indirgenmiş uzaydaki katsayılar olduğundan "reduced cost" indirgenmiş maliyet olarak adlandırılır.

Anahtar Sonuç:

Mevcut bir temel çözüm için;

Eğer $(z_j - c_j) \leq 0 \quad \forall j \in R$ ise, mevcut çözüm

z_0 optimaldir.

Çünkü; $(z_j - c_j) \leq 0 \ \forall j \in R$ olduğundan herhangi bir

mümkün çözüm $z \geq z_0$ olacaktır. Yani $z = z_0$

$(x_j = 0 \quad \forall j \in R)$ optimal bir çözümdür.

Örn 3.4

$$\begin{aligned} \text{Min } & x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & \text{s.t.} \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad m = 2,\ n = 4 \quad (p = n - m = 2)$$

- $B = [a_1, a_2]$'ye karşılık gelen t.m.ç.'ü ele alalım.

$x_B = \{x_1, x_2\} \quad x_N = \{x_3, x_4\} \quad c_B = (1,1) \quad R = \{3,4\}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B B^{-1} = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1)$$

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = c_B B^{-1}b = (1,-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$z_3 - c_3 = c_B \underbrace{B^{-1}a_3}_{y_3} - \underbrace{c_3}_{0} = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} y_4 - c_4 = (1,-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

DP'nin yeni modeli

$$\text{Min } z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

s.t.

$$\sum_{j \in R} y_j x_j + x_B = \bar{b}$$

$$x_j \geq \; \forall j \in R, \quad x_B \geq 0$$

$$\equiv \quad \text{Min } 3 + x_3 - x_4$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} x_3 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3, x_4 \geq 0 \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

Modeli mevcut t.m.ç.'e nispetle yazmış olduk.

Bu model şu şekildede yazılabilir;

$$\min\ 3 - x_3 + x_4 \qquad \bar{c} = (-1, 1)$$

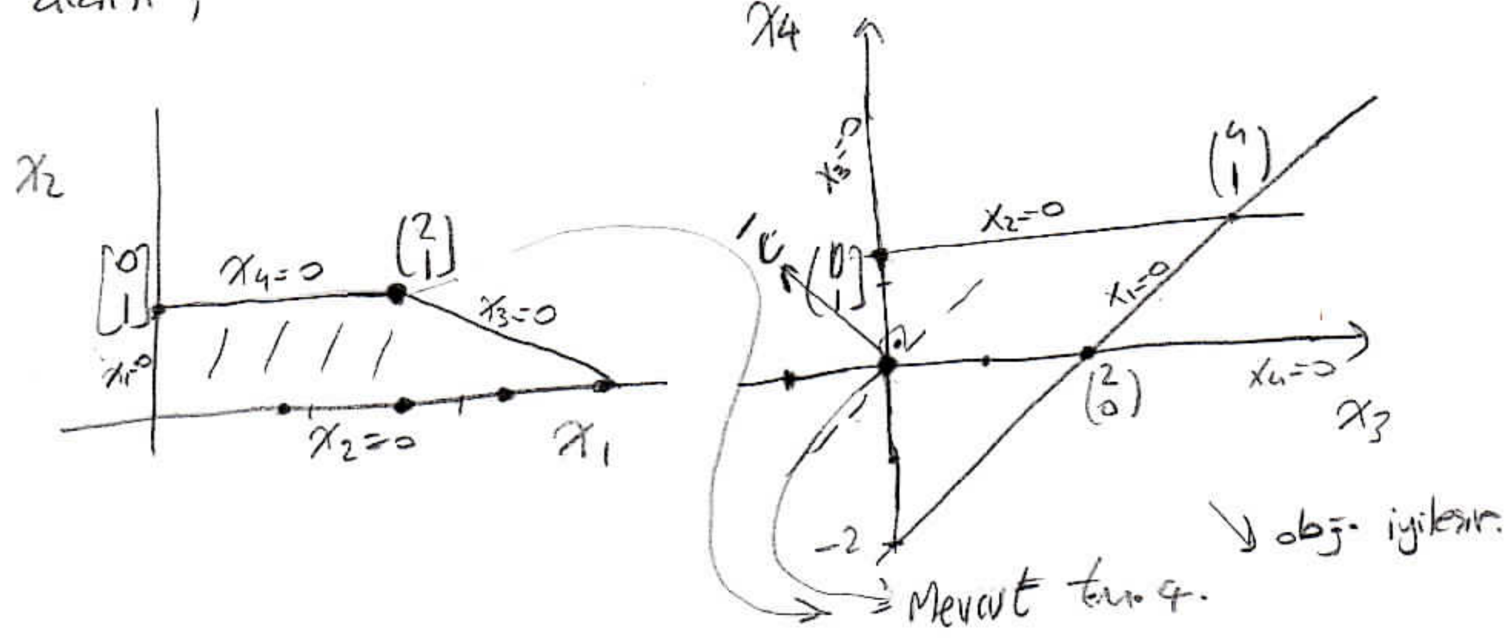
s.t.

$$x_3 - 2x_4 \le 2$$

$$x_4 \le 1$$

$$x_3, x_4 \geq 0$$

Yani $n=4$ değişkenli bir modeli $P = 4-2 = 2$ değişkenli halde, sadece temel olmayan değişkenlerin bir modeline indirgemiş olduk. İndirgemiş bu modelin mümkün çözüm alanı ve orjinal modelin çözüm alanı;



$z_3 - c_3 > 0$ olduğundan x_3 artarsa daha iyi çözüme ulaşırız. Yeni çözümü; ($x_4 = 0$ da kalmak şartıyla)

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_3 x_3$ 'ten buluruz.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3$$

x_3'ün alabileceği en büyük değer 2 dir. 2 den fazla değer alması x_1'in negatif değer olmasını gerektirir. $x_3 = 2$ olduğu yeni t.m.ç.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 0).$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- x_3 temel'e girer ve x_1 temelden çıkar.
- Yeni çözüm obj. değer $= 1$ (obj. iyileşti)
  İyileşme $(z_3 - c_3) x_3 = (1) \cdot 2 = 2$ kadar oldu.
- $x_B = \{x_2, x_3\}$ $\quad x_N = \{x_1, x_4\}$
- Yeni t.m.ç.'e göre problem tekrar formüle edilebilir.

Simpleks metodunun cebri ve $z_j - c_j$'nin yorumu

- Eğer bazı $z_j - c_j > 0$ ise mevcut çözüm opt. olmaz.
- $(p-1)$ temel olmayan değişkeni sıfırda tutup $z_j - c_j$ değeri en büyük değişkenin değerini artırırız. Bu değişkenin indeksi k olsun.

$x_j = 0 \quad \forall j \in R - \{k\}$ ve

$z = z_0 - (z_k - c_k)\, x_k$ ← sadece x_k artacak.

ve

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} a_k x_k$$

- Eğer $y_{ik} \le 0 \Rightarrow x_k$ arttıkça x_{B_i} her zaman sıfırdan büyük eşit kalır.

- Eğer $y_{ik} > 0 \Rightarrow x_k$ arttıkça x_{B_i} azalır.

ve $x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\limits_{1 \le i \le m} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$

değerini alır ($y_{ik} > 0$ olan satırlardan $\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ değeri en düşük olan değer)

- Dejenerasyon yoksa ($\bar{b}_r > 0$) $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$ olur.

ve $z_k - c_k > 0$ olduğundan amaç iyileşir.

- Yeni çözüm ;

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik} \cdot \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \qquad i = 1,2 \ldots m$$

) $x_{B_r} = 0$ olur.

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

all other x_j's are zero. $x_{B_r} = 0$ yani

m değişken > 0 ve $n-m$ değişken sıfır olur.

Yeni temel ;

$$B = (a_{B_1}, a_{B_2}, \ldots a_{B_{r-1}}, a_k, a_{B_{r+1}}, \ldots a_{B_m})$$

$y_{rk} \neq 0$ olduğundan bu sette bir temeldir (basis)

(Bunun ispatını görmüştük)

- Burada bir simpleks iterasyonu tanımlamış olduk;
  - Bir t.m.ç. ele al. optimal değil ise.
    - $z_k - c_k > 0$ olan bir temel olmayan değişkenin değerini arttır. Eğer tüm $z_k - c_k < 0$ ise Dur. opt. çözüm.
    - Temel değişkenlerden birisini sıfırla.
    - Yeni temel çözümü elde et.

$z_k - c_k$'nın yorumu;

$z_k - c_k > 0$ olan TOD temele girer (TD: temel değişken)

TOD $\downarrow$ temel olmayan değişken

$$z = c_B \bar{b} - (z_k - c_k) x_k \quad \text{idi}$$

$\bar{b} \downarrow B^{-1} b$

$$z_k = c_B B^{-1} a_k = c_B y_k = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ik}$$

c_{B_i}; i. TD'nin maliyeti

- x_k'nın değeri artarken x_{B_i}'ler azalıyordu. x_k'yı 1 birim arttırdığımızdan x_{B_i}, y_{ik} kadar azalır. x_k'yı 1 birim arttırmanın "getirisi"

$$\sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ik} \rightsquigarrow z_k \text{ dır}$$

x_k'yı 1 artırmanın "maliyeti" $\rightsquigarrow c_k$

net getiri $= z_k - c_k$ (obj. net iyileşme).

net getiri > 0 ise x_k artırılır.

- x_k bir temel değişken olsun; $x_k = x_{B_t}$ $c_k = c_{B_t}$

$$a_k = a_{B_t} \Rightarrow z_k = c_B B^{-1} a_k = c_B B^{-1} a_{B_t}$$

$B^{-1} a_{B_t}$ sadece t. pozisyonda 1, diğer elemanları sıfır olan bir vektördür. ($B^{-1}B = I$ olduğundan).

$\Rightarrow z_k = C_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = C_{B_t} \rightsquigarrow$ getiri $= C_{B_t}$

Maliyet $= C_{B_t} \Rightarrow z_k - C_k = C_{B_t} - C_{B_t} = 0.$

– Genel olarak $z_k - C_k = 0$ ise $\Rightarrow$ aynı obj. başka bir çözüm demektir (alternatif optimal).

x_k'yı her Δ arttırdığımızda başka bir optimal çözüm elde ederiz

– $x_k \rightarrow$ giren değişken

– $x_{B_r} \rightsquigarrow$ x_k'yı bloklayan (blocking variable) değişken.

Örn 3.6

Min $-3x_1 + x_2$

s.t.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad &= 4 \\
-x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$B = [a_1\ a_4]$ 'e karşılık gelen t.m.ç. ele alalım.

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$X_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

obj. value $z_0 = c_B B^{-1} b = (-3,0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -12$

– Bu çözümü iyileştirebilirmiyiz?

$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = (-3,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -7$

$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = (-3,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -3$

$z_k - c_k > 0$ olan bir x_k olmadığından mevcut çözüm tek optimal çözümdür (unique)

⇒ Eğer amaç fonksiyonu $-2x_1 - 4x_2$ olsaydı;

– aynı t.m.ç. ele alırsak.

$z_0 = (-2,0) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -8$ olurdu

$z_2 - c_2 = (-2,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-4) = 0$

$z_3 - c_3 = (-2,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -2$

- mevcut çözüm bir optimal çözüm ancak tek optimal çözüm değil. Alternatif optiler var.
- x_2 yi arttırarak sonsuz sayıda opt. çözüm elde edebiliriz. ($x_3=0$ da kalacak).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}a_2x_2$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_2$$

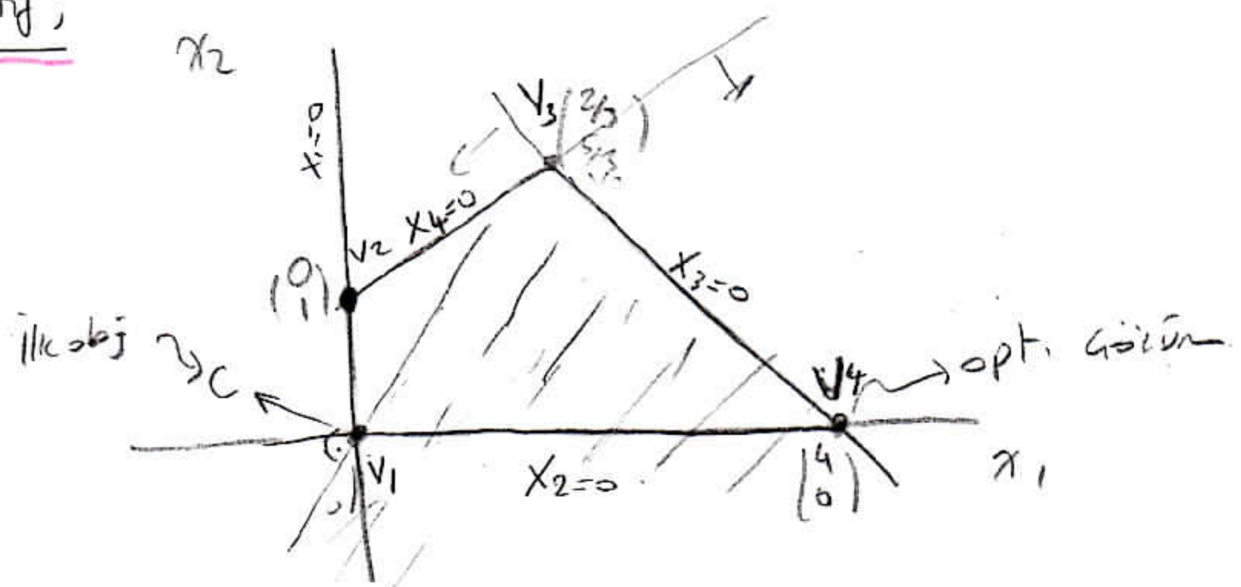
x_2 nin maksimum değeri $\frac{5}{3}$ $\left(x_2 \le 5/3\right)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 5-3x_2 \end{pmatrix}$$

$x_2=\frac{5}{3}$'te alternatif opt. diğer t.m.ç. 'ü elde ederiz.

↳ alternatif opt. çözüm seti
tüm çözümlerin obj değeri $=-8$

İlk objektif;



- v_1'de $X_B = \{x_3, x_4\}$ $X_N = \{X_1, X_2\}$

$z_1 - c_1 > 0$, $z_2 - c_2 < 0$ (c ile geniş açı yapan yönler iyileştirme yönleridir)

x_1 temele girer , $x_3 = 0$ a gelir ve

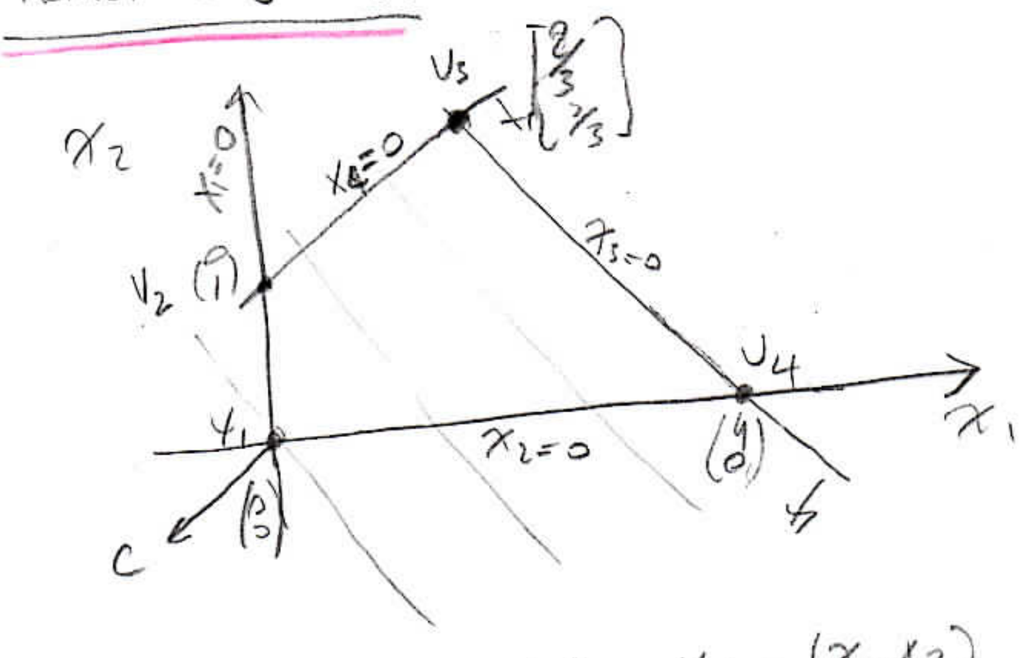
x_1'in artışını bloklar. x_3 temelden çıkar.

- v_2'ye gelinir. $x_B = \{x_1, x_4\}$. $X_N = \{x_2, x_3\}$

$z_2 - c_2 < 0$, $z_3 - c_3 < 0$ (tekrar hesaplanır)

$\Rightarrow$ unique optimal çözüm.

İkinci objectif : $c\,(-2,-4)$



- v_1'de $X_B = (x_3, x_4)$ $X_N = (x_1, x_2)$

$z_1 - c_1 > 0$, $z_2 - c_2 > 0$ (Hem x_1 in artış yönü hem de x_2'nin artış yönü c ile geniş açı yapar)

– x_1 yada x_2 artırılarak ancak iyileştirilebilir

x_2'yi artıralım. x_4 ilk olarak sıfıra varır

ve x_2 tabana girer x_4 çıkar ve V_2'ye

geliriz.

– V_2'de $X_B = \{x_2, x_3\}$ $X_N = \{x_1, x_4\}$

$z_1 - c_1 > 0$ dır ve $z_4 - c_4 < 0$ dır

(x_1 in artış yönü c ile geniş açı yapar)

x_1 artırılır ve x_3 ilk olarak sıfıra düşer.

ve V_3'e geliriz. (x_1 tabana girer ve x_3

tabandan çıkar.

– V_3 $x_B = \{x_1, x_2\}$ $X_N = \{x_3, x_4\}$

$z_3 - c_3 < 0$ ve $z_4 - c_4 = 0$

$\Rightarrow$ x_4'ü artırabiliriz ancak amaç değeri aynı kalır.

x_4'ü artırdığımızda x_2 ilk sıfır olur.

ve V_4'e geliriz. (aradaki tüm değerler ve

V_4, V_3 alternatif opt. çözüm olur.

Sınırsız optimal durumu;

– Bir temel olmayan değişken x_k için $z_k - c_k > 0$ olsun. Bu değişkeni artırmamızla ilgili eşitlik;

$$x_B = B^{-1}b - y_k x_k \quad \text{tır.}$$

eğer $y_k \leq 0$ ise (tüm elemanları ≤ 0) bu x_k'yı sonsuza kadar artırabileceğimiz anlamına gelir ve amaç fonksiyonunda;

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k, \ -\infty\text{'a gider.}$$

x_k'nın $+\infty$ gitmesi aşağıdaki ışın yönünde hareket etme anlamına gelir.

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

ışının başlangıç noktası mevcut t.u.ç.

ışının yönü $d = \begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ k. eleman

"1" k. elemandır.

Daha önce sınırsız çözüm için;

$cd < 0$ olması gerektiğinden bahsetmiştik.
$\hookrightarrow$ Bir uç yön

$$cd = (c_B, c_N)\begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -c_B y_k + c_k$$

$$= -z_k + c_k.$$

$c_k - z_k < 0$ olduğunu biliyoruz ($z_k - c_k > 0$) o halde $cd < 0$ dır. (burada $\begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bir uç yöndür (ispatla))

Örn 3.7

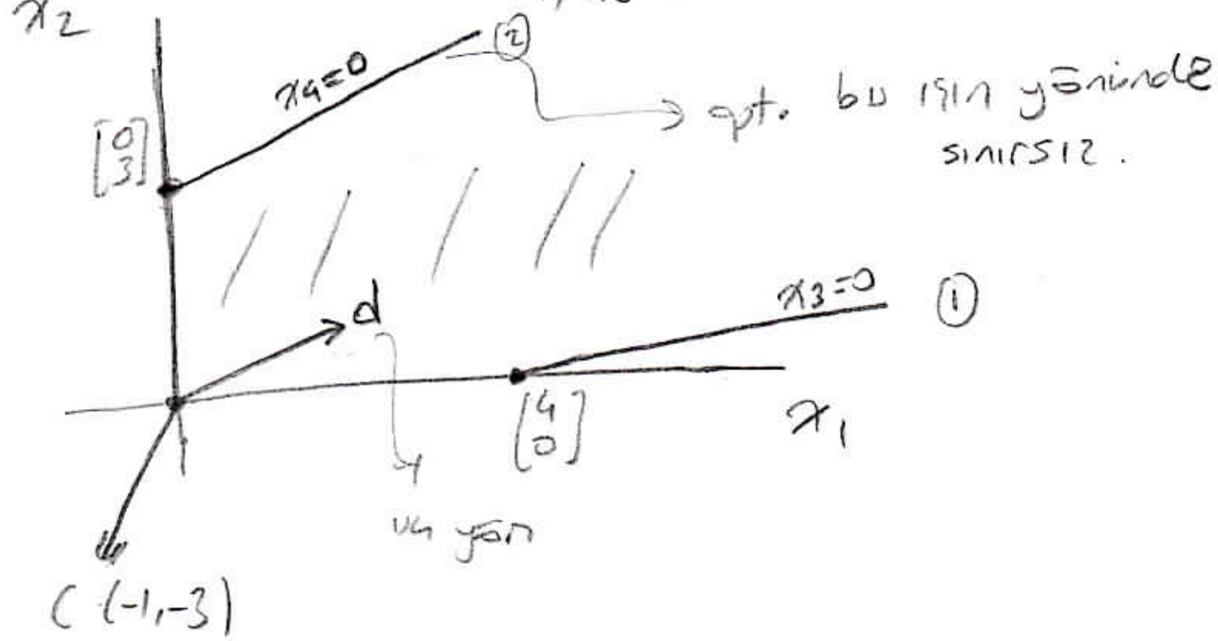
$$\text{Min } -x_1 - 3x_2$$

s.t.

$$x_1 - 2x_2 \le 4 \quad (1) \quad (x_3)$$

$$-x_1 + x_2 \le 3 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

– $B = (a_3, a_4)$ e karşılık gelen t.m.u.ç yi ele alalım

$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_B B^{-1} = (0, 0)$

$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = -c_1 = 1$

$z_2 - c_2 = c_B B^{-1} a_2 - c_2 = -c_2 = 3$

x_2 en pozitif $z_k - c_k$ 'ya sahip olduğundan tabana girer

$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$

x_2 artarken x_4 sıfıra ilk iner (x_3 zaten artar)

x_2 en fazla 3 olur. Yeni t.m.u.ç.;

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 10, 0)$.

– yeni temel $B = (a_3, a_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$c_B = (0, -3) \qquad c_B B^{-1} = (0, -3)$

$X_N = \{x_1, x_4\}$

$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1 = (0,-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (-1) = 4$

$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (0,-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -3$

x_1 tabana girmesi gerekir ($x_4 = 0$ da kalacak)

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_1 x_1$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{y_k} x_1 = \begin{pmatrix} 10+x_1 \\ 3+x_1 \end{pmatrix} \quad (y_k \leq 0)$$

$\Rightarrow$ x_1'i $+\infty$ götürebiliriz ve her x_1'değeri için bir mümkün çözüm olur. Kısıtlara bakar isek;

① $x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 - 2(3+x_1) + (10+x_1) = 4 = 4$

② $-x_1 + x_2 + x_4 = -x_1 + (3+x_1) + 0 = 3 = 3$

sağlanırlar.

$z = -x_1 - 3x_2 = -x_1 - 3(3+x_1) = -9 - 4x_1$

$(x_1 \to \infty, z \to -\infty)$

Dolayısıyla optimal çözüm aşağıdaki ışın boyunca sınırsızdır;

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0 \right\}$$

$\to -y_k = -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{array} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \geq 0 \right\}$$

k. pozisyonda 1.

$cd = (-1, -3, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ sınırsız çözüm için gerek ve yeter şart.

Simpleks Metodu Adımları;

1. Bir temel için $BX_B = b$ sistemini çöz.

$$X_B = B^{-1}b = \bar{b} \;, X_N = 0, \text{ ve } z = C_B X_B$$

2. $wB = C_B$ sistemini çöz.

$w = C_B B^{-1}$ ⇝ simpleks çarpanları (simpleks multipliers).

ve $z_j - c_j = w a_j - c_j$ leri tüm X_N değişkenleri için bul.

$z_k - c_k = \max\limits_{j \in R} z_j - c_j$ olsun. (R: temel olmayan değ. indisleri).

- Eğer $z_k - c_k \leq 0$ ise, DUR mevcut tmüm. optimaldir. Aksi takdirde 3'e git

3. $By_k = a_k$ sistemini çöz

$y_k = B^{-1}a_k$. Eğer $y_k \leq 0$ ise DUR, optimal çözüm sınırsızdır ve aşağıdaki ışın opt. çözümü tanımlar;

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

e_k: n-m boyutlu, k. değeri 1 diğer değerleri sıfır olan vektör.

Eğer $y_k \leq 0$ ise 4'e git.

4. x_k temele girer. x_{B_r} bloklayan temel değişken olsun. Bu değişken minimum oran testinden bulunur;

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

ve x_{B_r} temeli terkeder, x_k temele girer ve yeni temel - B olur (a_k; a_{B_r} nin yerine geçer.) ve 1. adıma dön.

Örn; 3.8 Simplex metodu:

$$\text{Min } -x_1 - 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

İterasyon 1:

$B = [a_3, a_4]$ olsun (simpleks bir başlangıç tabanına ihtiyaç duyar) $N = [a_1, a_2]$

- $Bx_B = b$ çözer isek: $x_B = B^{-1}b$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{pmatrix}$$

$$z = c_B x_B = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

- $wB = c_B$ 'yi çözer isek.

$$w = c_B B^{-1} \Rightarrow (w_1, w_2) = (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$

↳ simpleks çarpanı

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = 0 - (-1) = 1$$

$$z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 0 - (-3) = 3$$

$\Rightarrow x_2$ artırılmalı

- x_2 artırabilmemiz için y_2 yi hesaplamalıyız

$By_2 = a_2$ yu çözelim.

Örn: 3.8 Simplex metodu:

$$\min \; -x_1 - 3x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 \le 6 \qquad\qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + x_2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

İterasyon 1:

$B = [a_3, a_4]$ olsun (simpleks bir başlangıç tabanına ihtiyaç duyar) $N = [a_1, a_2]$

- $Bx_B = b$ çözer isek: $x_B = B^{-1}b$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{Bmatrix}$$

$$z = c_B x_B = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

- $wB = c_B$ 'yi çözer isek.

$$w = c_B B^{-1} \Rightarrow (w_1, w_2) = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$\hookrightarrow$ simpleks çarpanı

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = 0 - (-1) = 1$$

$$z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 0 - (-3) = 3$$

$\Rightarrow x_2$ artırılmalı

- x_2 artırabilmemiz için y_2 yu hesaplamalıyız

$By_2 = a_2$ yu çözelim.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y_{12} = 3 \; , \; y_{22} = 1$

* Temelden çıkacak x_{B_r} ın belirlenmesi

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{12}}, \frac{\bar{b}_2}{y_{22}} \right\} = \min \left\{ \frac{6}{3}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

$\rightarrow \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$

$\Rightarrow r = 2 \quad x_{B_2} = x_4$ temelden çıkar.

<u>Iteration 2</u>: Yeni temel;

$B = [a_3, a_2] \qquad N = [a_1, a_4]$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

* x_B ; $Bx_B = b$ yi çözerek bulunur.

$x_2 = 1$ olacağını biliyoruz. Bu eşitlikten;

$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

yada;

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

* w'yu $wB = c_B$ 'den bul

$3w_1 + w_2 = -3$
$\Rightarrow w_2 = -3$

$(w_1, w_2) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, -3) \Rightarrow w_1 = 0 \quad w_2 = -3$

↳ her bir temel olmayan değişken için bir w_i

$z_1 - c_1 = w a_1 - c_1$

$= (0, -3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - (-1) = 4.$ x_1 tenele girer

$z_4 - c_4 < 0$ olacaktır.(?) x_4 yeni temelden çıktı tenele girerse bir önceki daha kötü çözüme gideriz.

$y_{11} + 3y_{21} = 2$
$\Rightarrow y_{11} = 5$

* $By_1 = a_1$ i çöz;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_{21} = -1 \ , \ y_{11} = 5$$

$y_{21} < 0 \Rightarrow x_{B_2} = x_2$, x_1 artarken negatif olmaz.

$\Rightarrow x_{B_1} = x_3$ temelden çıkar.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} x_1}$$

$\Rightarrow x_1 = 3/5$ olunca $x_3 = 0$ olur.

Iteration 3

$B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad N = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ bu eşitliğin çözümü

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = c_B B^{-1} b = (-\cancel{1}, -3)\begin{pmatrix} 3/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} = -\frac{27}{5}$$

* $wB = c_B$ yi çöz.

$(w_1\ w_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1, -3) \Rightarrow w_1 = -4/5 \quad w_2 = -3/5$

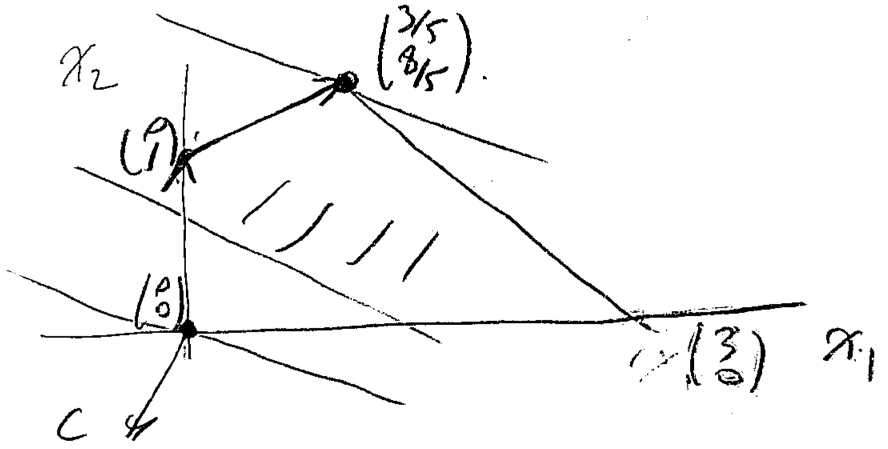
- x_3 bir önceki iterasyonda temelden çıktı, temele giremez $(z_3 - c_3 < 0)$

$z_4 - c_4 = w a_4 - c_4$

$= (-4/5, -3/5)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -3/5 < 0$

$z_j - c_j \le 0 \quad \forall j \in R \Rightarrow$ mevcut çözüm optimal.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/5, 8/5, 0, 0)$



3.8 Tablo formatında simplex metodu;

- Simplex metodunda

$BX_B = b$, $wB = C_B$ ve $By_k = a_k$ her iterasyonda

çözülen sistemlerdir.

- Bu sistemlerin çözümünde farklı yaklaşımlar farklı algoritmalara yol açmıştır.

- Biz tablo formatında simplex metodunu göreceğiz

DP problemleri aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

X: bir t.m.ç ve B'de ilgili temel matris

$$\min z$$

s.t

$$z - C_B X_B - C_N X_N = 0 \qquad (3.15)$$

$$BX_B + NX_N = b \qquad (3.16)$$

$$X_B,\ X_N \geq 0$$

(3.17) $X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$ (3.16 yı B^{-1}'le çarparsak)

3.17'yi C_B ile çarpıp 3.15'ya eklersek;

$$z - 0X_B \ (C_B B^{-1}N - C_N)X_N = C_B B^{-1}b \qquad (3.18)$$

Şu anki tanımda $x_N = 0$ olduğundan, 3.17 ve 3.18'den;

$$x_B = B^{-1}b \quad ve \quad z = C_B B^{-1} b \text{ elde edilir.}$$

3.17 ve 3.18'i tablo şeklinde gösterir isek;

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

RHS ⇝ right hand side

$C_B B^{-1} b$ ⇝ sıfır satırı

$B^{-1} b$ ⇝ satır 1–M.

z; temel değişken haline gelir.

- z ve x_B'leri x_N cinsinden ifade ettiğimiz bu tablo kanonik form olarak adlandırılır.
- Bu tablo bize obj. değerini, mevcut çözümü ve simplek iterasyonu için gerekli her şeyi verir;

  * $z_j - c_j$ değerleri ⇝ sıfır satırında x_N değişkenlerinin altından okunur.

  * x_k: temele girecek değişken için;

    $y_k = B^{-1} a_k$ ⇝ ilgi değişkenin altındaki kolon; satır 1–m değerleri.

    ($y_k \leq 0$ ⇝ sınırsız optimal çözüm

    $y_k \nleq 0$ → Bir temel değişken temel olmayanla yer değiştirir.)

- Min oran testini yapmak için gerekli $B^{-1}b$'de var. (44)

- Tabloda aşağıdakileri pivotlama ile yerine getiriniz;

  - Temel değişkenleri ve değerlerini güncelle
  - $z_j - c_j$ değerlerini temel olmayan değişkenler için güncelle
  - y_j'leri güncelle.;

	z	x_{B_1} ...	x_{B_r} ...	x_{B_m}	x_j	x_k	RHS
z	1	0 ...	0 ...	0	... $z_j - c_j$	... $z_k - c_k$ ---	$c_B\bar{b}$
x_{B_1}	0	1	0	0	y_{1j} - -	y_{1k} - -	$\bar{b}_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
x_{B_r}	0	0	1	0	y_{rj} - -	y_{rk} - -	b_r → çıkacak
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
x_{B_m}	0	0	0	1	y_{mj} ---	y_{mr} ---	b_m

↓ girecek.

- Pivotlama;

x_k sütununu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to$ k. satır haline getirme

operasyonu; çünkü x_k' temele girecek ise

$y_k = B^{-1} a_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olur. (a_k, B'nin içerisinde bir kolon olduğundan)

ve "satır sıfır" değeri de "sıfır" olur (Temeldeki değişkenlerin "net getirisi" sıfırdır.).

Pivotlama;

1. r satırını y_{rk}'ya böl

2. Diğer satırları sıfırlayacak katsayılarla yeni r satırını çarp ve her bir satıra ekle.

$c_k - z_k$ ile çarpılmalı

	z	x_{B_1} ...	x_{B_r}	... x_{B_m}	x_j	x_k	RHS
z	1	0	$0 + \frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$		$(z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	0	$c_B \bar{b} - (z_k - c_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}		1	$0 - \frac{y_{1k}}{y_{rk}}$	0	$y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k}$	0	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}}{y_{rk}} \bar{b}_r$
x_k	0	0 ...	$\frac{1}{y_{rk}}$	... 0	... $\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ ...	1	$\bar{b}_r / y_{rk}$
x_{B_m}		0 ...	$0 - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	1	$y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{mk}$	0	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} \bar{b}_r$

— $-y_{ik}$ ile çarpıp ekle (k satırını).

— x_k nın dahil olduğu yeni temel $\hat{B}$ olsun.

Yeni temel değişkenlerin altındaki matris tablodan ne olur? (I ; birim matris olur). Buda tüm tablonun $\hat{B}^{-1}$ ile çarpılması anlamına gelir

Yani pivotlamayla oluşan çözüm istediğimiz çözümdür.

Örnek 3.9' üzerinden geçin.!

Örn 3.9 $\quad$ Min $x_1 + x_2 - 4x_3$ $\qquad$ Min $x_1+x_2-4x_3+0x_4+0x_5+0x_6$

s.t. $\qquad\qquad$ s.t.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{array}$$

Tablo formatında simplekste çözüm:

<u>Başlangıç iterasyonu;</u> Bir t.m.ç. bul.

$b \ge 0$ olduğundan, boşluk değişkenlerini temel değişkenler olarak alabiliriz. (Her biri direk sağ tarafa eşit olur $\rightarrow B^{-1}b = Ib = b$ olduğundan)

$B = [a_4, a_5, a_6] = I_3 \rightarrow$ birim matris

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	0	-1	-1	1	0	0	1	4

RHS z satırı: $\rightarrow c_B B^{-1} b$ $(c_B = 0)$ $\rightarrow 0$ temel değişkenler için sıfır

RHS sütunu: $\rightarrow B^{-1}b$

$x_1, \dots, x_6$ sütunları: $B^{-1}a_i$

z satırı: $\rightarrow c_B B^{-1} N - c_N \rightarrow z_j - c_j$ $j \in R$ değerleri

Burada $c_B = (0,0,0)$ olduğundan direk $-c_N$'e eşit ilk tabloda

- x_3 temele girer $(z_k - c_k > 0)$
- x_6 temelden çıkar (min. oran testine göre)

iterasyon 2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	9
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}$

→ optimal değil. $(z_1 - x_1 > 0)$

- x_1 girer ve x_4 çıkar

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17
x_1	0	1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
x_5	0	0	2	0	0	1	0	6
x_3	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3

→ optimal $\begin{pmatrix} z_j - c_j \le 0 \\ \forall j \in R \end{pmatrix}$

- $x_1 = 1/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 13/3$
- optimal temel $B = [a_1, a_5, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- B^{-1}'i tablodan görebiliriz.
  - Başlangıçtaki boşluk değişkenlerinin matrisi

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_4 & a_5 & a_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Son tabloda $B^{-1} \cdot A_1 = B^{-1}$, boşluk değişkenlerinin y_j değerlerinden oluşur.

$$B^{-1} = [y_4, y_5, y_6] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \left(B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2. \text{ iterasyonda} \right)$$

Simplex tablosundaki değerlerin yorumu;

	z	x_B	x_N	
z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

- Bu tablo temel değişkenlerin ve amacın (z) temel olmayan değişkenler cinsinden ifadesidir.

- Yani z ve x_B bağımlı değişken, x_N bağımsız değişken olarak ele alınabilir (kanonik form)

Sıfır satırını ele alalım;

$$z = C_B B^{-1} b - (C_B B^{-1} N - C_N) x_N$$

$$= C_B B^{-1} b + \sum_{j \in R} (C_j - z_j) x_j \qquad (z_j = C_B B^{-1} a_j)$$

$\frac{\partial z}{\partial x_j}$ = z nin temel olmayan değişken x_j ye göre değişimi hızı.

$\frac{\partial z}{\partial x_j} = (C_j - z_j)$ dır. (Tüm diğer değişkenler sabitken x_j deki 1 birim artışın, z deki etkisi)

- eğer $\frac{\partial z}{\partial x_j} < 0$ ise $(z_j - C_j > 0)$ x_j deki artış z'yi azaltır.

Temel değişkenler satırını ele alalım;

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$
$$= B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j$$
$$= B^{-1}b - \sum_{j \in R} y_j x_j$$

$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -y_j$ x_j'yi artırdığımızda x_B, $-y_j$ hızıyla değişir (azalır)

$\Rightarrow$ yani x_j'yi artırmak x_{B_i} $-y_{ij}$ hızıyla azalır.

Amacın Sağ taraf değerlerine göre değişim:

$$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$ (sağ taraf gerekli kaynakları gösterir)

$$-\frac{\partial z}{\partial b} = c_B B^{-1}.$$

- Bu, sıfır satırında boşluk değişkenlerinin (slack vars). altındaki değer;

$c_B B^{-1} I - 0 = c_B B^{-1} = w$ dur.

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial b} = w$ $\frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$ → amacın i satır sağ tarafındaki değişime göre değişim hızı.

Temel değişkenlerin sağ taraf vektörüne göre değişimi;

$$\frac{\partial x_B}{\partial b} = B^{-1} \qquad \left(x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \right)$$

olur.

$\frac{\partial x_B}{\partial b}$'nin i. satırı $\frac{\partial x_{B_i}}{\partial b}$ (i. temel değişkenin tüm RHS vektörüne göre değişimi).

$\frac{\partial x_B}{\partial b}$'nin j. kolonu $\frac{\partial x_B}{\partial b_j}$ (tüm tem. değiş. j. sağ tarafa göre değişimi)

$\frac{\partial x_B}{\partial b}$'nin (i, j) elemanı $\frac{\partial x_{B_i}}{\partial b_j}$ (i. tem. değ. j. RHS'ye göre değişimi)

– Bu değişim değerleri, temel olmayan değişkenlerin değerlerini artırmanızın mümkün olduğu (mümkün çözüm alanında olduğu) durumlar için geçerlidir. Tem. ol. değ. artıramıyorsak bu değerler elde edemeyiz zaten.

Örneğin: Bir dejenere çözüm varsa ($x_{B_i} = 0$ olan bir temel değişken); tem. ol. değ. artırmanız bizi hemen mümkün olmayan bölgeye itebilir.

Örn 3.10 Örn. 3.9'da 2. iterasyonu ele alalım.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	−5	0	0	0	−4	−16
x_4	0	3	−1	0	1	0	−2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	−1	1	1	0	0	1	4

B^{-1}

$X_N = \{x_1, x_2, x_6\}$

$* \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = c_1 - z_1 = -3 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = c_2 - z_2 = -5 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_6} = 4$

$* \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -y_{41} = -3 \qquad \frac{\partial x_5}{\partial x_1} = -y_{51} = 0 \qquad \frac{\partial x_3}{\partial x_6} = -1$

$\frac{\partial x_B}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$* \quad \frac{\partial z}{\partial b_1} = w_1 = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial b_2} = w_2 = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial b_3} = -4$

$\left(\frac{\partial z}{\partial b} = c_B B^{-1} = w \right)$

$* \quad \frac{\partial x_5}{\partial b_2} = 1$ (B^{-1}'de (2,2) deki değer − x_5 2. satır, b_2 2. kolon)

$\frac{\partial x_4}{\partial b_3} = -2$ (B^{-1}'de (1,3) teki değer)

$$- By_j = a_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{B_i} y_{ij} = a_j$$

$\Rightarrow y_j$, a_j'yi temel kolonların doğrusal kombinasyonu olarak temsil etmemiz için gerekli değerlerden oluşmuş kolon vektörü olarak görülebilir.

Örn 3.10 da (2. iterasyonda)

$$a_2 = B y_2 \quad (y_2 = B^{-1} a_2)$$

$$a_2 = a_4 . y_{12} + a_5 . y_{22} + a_3 y_{32} . \quad \left(y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$a_2 = -1 . a_4 + 2 a_5 + 1 a_3$$