CH 5

5.1 REVİZE SİMPLEX METODU

- Simpleks metodu daha küçük bir matrisle uygulanabilir (Tüm tablo yerine)

Temelin tersi	RHS
w	$C_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

$w = C_B B^{-1}$ ⤳ simpleks çarpanları

$\bar{b} = B^{-1} b$

- elimizde bu tablo varsa w'lar yardımıyla $z_j - c_j$'leri hesaplarız. Sonra temele girecek için $y_k = B^{-1} a_k$ hesaplarız ve simpleks iterasyonlarını uygularız;

Temelin tersi	RHS
w	$C_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}_1$ $\bar{b}_2$ $\vdots$ $\bar{b}_r$ $\vdots$ $\bar{b}_m$

x_k
$z_k - c_k$
y_{1k} y_{2k} $\vdots$ y_{rk} $\vdots$ y_{mk}

⤳ Bu kısmi tablo kullanılarak pivotlama yapılır.

Örn: 5.1

$$\text{Min } -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \le 6$$

$$x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,..,6$$

- Boşluk değişkenleri x_7, x_8, x_9 u ekleyerek standart forma getiririz.

- Başlangıç t.m.ç. için $B = [a_7, a_8, a_9]$ alınabilir.

$w = c_B B^{-1} = (0,0,0) \times I_3 = (0,0,0)$ $\quad \bar{b} = B^{-1} b = b$

$c_B B^{-1} b = 0$

Iterasyon I

Tem. Tersi (w) — RHS

z	0	0	0	0 → $c_B B^{-1} b$
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4 → $B^{-1} b$
x_9	0	0	1	4

B^{-1}

$w = (0,0,0)$ $\quad z_j - c_j = w a_j - c_j$

$w = 0 \Rightarrow z_j - c_j = -c_j$

$z_1 - c_1 = 1$, $z_2 - c_2 = 2$, $z_3 - c_3 = -1$, $z_4 - c_4 = 1$

$z_5 - c_5 = 4$, $z_6 - c_6 = -2$

$\Rightarrow x_5$ temele girer

$$y_5 = B^{-1} a_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} z_5 - c_5 \\ \hline y_5 \end{bmatrix}$ → Bu vektörü tablonun sağına yerleştirelim.

	Tem. Ter.			RHS
z	0	0	0	0
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4

x_5: $\begin{bmatrix} 4 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ⤳ Min. oran testine göre

	Tem. Ter.			RHS
z	0	0	-2	-8
x_7	1	0	$-1/2$	4
x_8	0	1	0	4
x_5	0	0	$1/2$	2

⤳ yeni çözüm.

<u>Iterasyon 2</u> $w = (0,0,-2)$

$z_1 - c_1 = 1$, $z_2 - c_2 = 2$, $z_3 - c_3 = -3$, $z_4 - c_4 = -1$, $z_6 - c_6 = -4$

$z_9 - c_9 = -2$

$\Rightarrow x_2$ temele girer

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_2 - c_2 \\ \hline y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	T.T.			R.H.S.
z	0	0	-2	-8
x_7	1	0	$-1/2$	4
x_8	0	1	0	4
x_5	0	0	$1/2$	2

x_2: $\begin{bmatrix} 2 \\ \hline 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

z	-2	0	-1	-16
x_2	1	0	$-1/2$	4
x_8	1	1	$-1/2$	8
x_5	0	0	$1/2$	2

Iterasyon 3 $w = (-2, 0, -1)$

$z_1 - c_1 = -1, \; z_3 - c_3 = -4, \; z_4 - c_4 = -2, \; z_6 - c_6 = -5, \; z_9 - c_9 = -1$

Tüm $z_j - c_j \leq 0 \Rightarrow$ optimal çözüm bulundu.

→ Revise simpleks metodun getirisi işlem sayılarının azaltılmış olmasıdır. Özellikle $n >> m$ ise ve A matrisinin bir çok değeri sıfır ise (sparse matrix).

→ Revise metodu daha sonraki kısımlarda kullanılacaktır.

5.3 FARKA'S LEMMA VE SIMPLEKS METODU:

- Farka's lemma Karush-Kuhn-Tucker optimalite koşulları için gerekli bir konudur.

Farka's lemma:

Aşağıdaki lineer sistemlerden sadece birisinin çözümü vardır (ikisinin birden olamaz);

Sistem 1: $Ax \geq 0$ ve $cx < 0$

Sistem 2 $wA = c$ ve $w \geq 0$

$A_{m \times n}$ ve c bir n boyutlu vektördür.

x ve w iki sistemdeki değişkenler.

İspatı:

Teoremi tekrarlayacak olursak

- Eğer $Ax \geq 0$ ve $cx < 0$ sağlayacak bir x çözümü var ise $wA = c$, $w \geq 0$ sistemini sağlayacak bir çözüm olamaz. Tersi durum olarakta, eğer $Ax \geq 0$, $cx < 0$ çözümü yoksa $wA = c$, $w \geq 0$ sisteminin çözümü vardır.

I. durum: $Ax \geq 0$, $cx < 0$ sisteminin çözümü var olsun.

Eğer sistem 2 nin w gibi bir çözümü varsa

$$\Rightarrow cx = \underbrace{wA}_{c}x \geq 0 \quad (w \geq 0,\ Ax \geq 0 \text{ olduğundan})$$

ancak $cx < 0$ dır ve bu bir tezat olur dolayısıyla sistem 2 nin w gibi bir çözümü olamaz, eğer sistem 1 in çözümü varsa.

II durum: $Ax \geq 0$, $cx < 0$ sisteminin çözümü olmasın. Bu durumda sistem 2 nin çözümü olacağını aşağıda göstereceğiz.

P: Minimize $\{cx : Ax \geq 0\}$ problemini ele alalım.

P problemini standard forma getirir isek;

$x = x' - x''$, $x', x'' \geq 0$ ve boşluk değişkenleri

s eklersek.

P': Minimize $\{ cx' - cx'' : Ax' - Ax'' - s = 0 ,\ x', x'', s \geq 0 \}$

- Burada $x' = x'' = s = 0$ bir optimal çözümdür. (x'''ı Δ gibi bir değer artırmak ancak x' da eşdeğer bir şekilde artırmakla mümkün olacağından amaç değeri hep sıfırda kalır)

- Problemin optimal çözümünün olması "$z_j - c_j \leq 0$" elde edeceğimiz anlamına gelir;

$z_j - c_j = w a_j - c_j$ ve $w = c_B B^{-1}$ kullanarak.

$wA - c \leq 0$, $-wA + c \leq 0$ ve $-w \leq 0$ olur

x' için, x'' için, s için

$wA = c$, $w \geq 0$ ⇝ sistem 2 nin çözümü var olduğunu gösterir.

Farkas Lemmanın Geometrik Yorumu

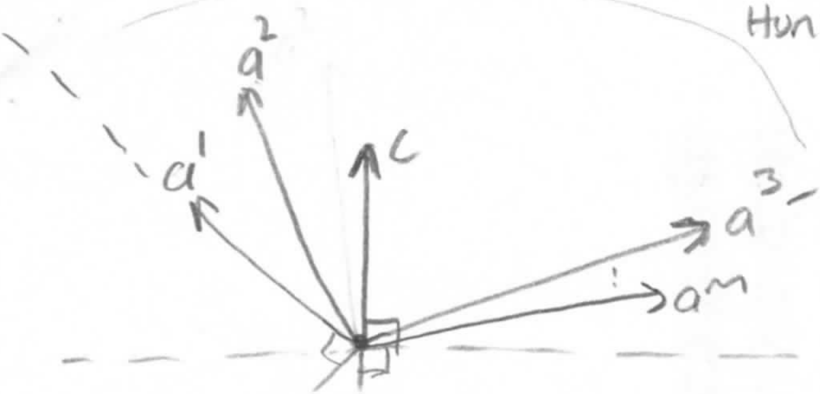
(I) Sistem 2 nin çözümü olduğu durum;

$$\underline{wA = c ,\ w \geq 0} \Rightarrow c = \sum_{i=1}^{m} w_i a^i ,\ w_i \geq 0$$

a^i: A nın i. satırı $\qquad i = 1, 2, \dots m$

Yani c'yi A'nın satırlarını pozitif lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

$\equiv$ c vektörü A nın satırlarınca oluşturulan huninin içerisindedir.



← Sistem 2'nin çözümü var.

II System I has a solution;

$Ax \geq 0$, $cx < 0$. $y = -x$ alalım

$\Rightarrow Ay \leq 0$, $cy > 0$

↳ $a^i y \leq 0$ için.

$\Rightarrow y$, A'nın satırlarıyla 90° büyük eşit açı yapmalı

($\cos\theta < 0$)

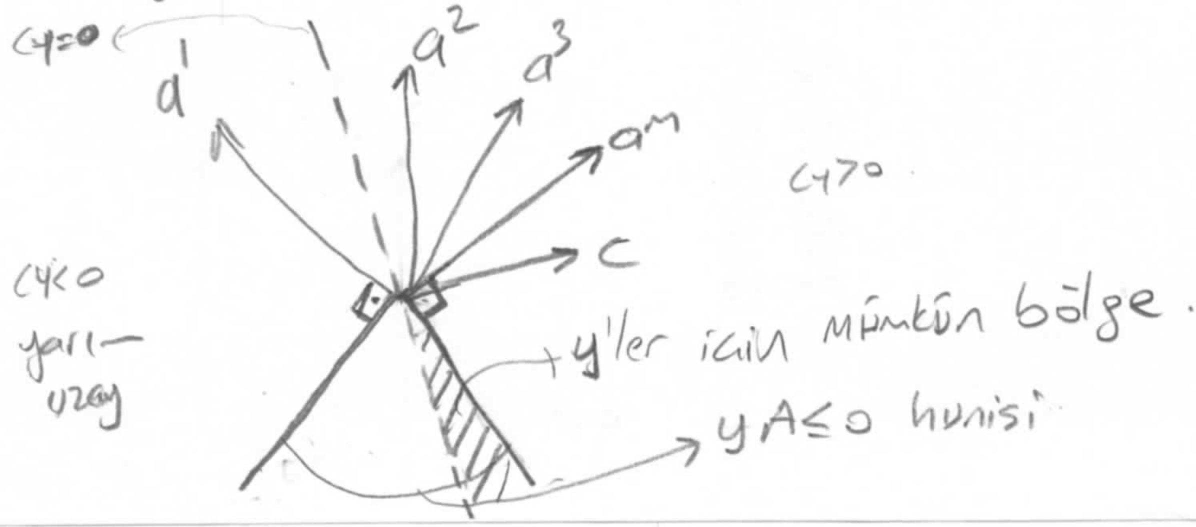
ve y, c ile 90 dereceden küçük açı

yapmalı

$X_1 = \{y : Ay \leq 0\}$ → a^i vektörlerinden oluşan huni

$X_2 = \{y : cy \geq 0\}$ → yarım uzay

Eğer $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ise y gibi bir çözüm vardır.



5.4 Karush-Kuhn-Tucker optimalite şartları (KKT)

- optimalliği karakterize etmenin yolu (gerek ve yeter şart olarak). Daha sonraki bölümlerde kullanılacaktır.

* Eşitsizlik kısıtlı DP'lerde KKT optimalite şartları ;

Min CX

s.t.

$AX \geq b$

$X \geq 0$.

$\left(A_{m \times n}, C_{n}, b_{m} \right)$

- $\bar{X}$ herhangi bir mümkün çözüm olsun
- $GX \geq g$ ⤳ $AX \geq b$, $X \geq 0$ içinden $\bar{X}$'da sınırlayıcı (binding) eşitsizlikler seti olsun

⇒ Eğer $\bar{X}$ optimal ise, $\bar{X}$'da iyileştirici bir yön, d, olamaz:

⇒ Eğer $\bar{X}$ optimal ise ;

$Cd < 0$ ve $Gd \geq 0$ 'ı sağlayacak bir

d yönü olamaz. Aksi takdirde ; d yönünde giderek amacı azaltırdık ($Cd < 0$) ve bir adım büyüklüğü $\lambda > 0$ için

$G(\bar{X} + \lambda d) = \underset{g}{\underset{\shortparallel}{G\bar{X}}} + \lambda G d \geq g$ ve λ yeterince küçük seçilirse kalan kısıtlarıda $\bar{x}+\lambda d$ sağlayacaktır.

Yani: $\bar{x}$ optimal ise;

$cd<0, \quad Gd\geqslant 0$ sisteminin bir çözümü olamaz.

$\Rightarrow$ Farkas's lemma kullanarak eğer yukardaki sistemin çözümü yok ise

$u\geqslant 0, \quad uG=c$ sistemini sağlayacak

bir u çözümü vardır.

a^i: A matrisinin i. satırı

e_j : jth pozisyonunda 1, diğer kolonlarda sıfır olan vektör

$I=\{i: a^i\bar{x}=b_i\}$ — $Ax\leq b$'de $\bar{x}$ için sınırlayıcı kısıtlar.

$J=\{j: \bar{x}_j=0\}$ — $x\geqslant 0$'da $\bar{x}$ için sınırlayıcı kısıtlar.

yani $G\bar{x}\geqq g$ sınırlayıcı kısıtlar ($\bar{x}$ çözümünde) I ve J kısıtlarından oluşsun;

u'yu da ikiye ayıralım $u=(w_i$ for $i\in I$, v_j for $j\in J)$ olsun.

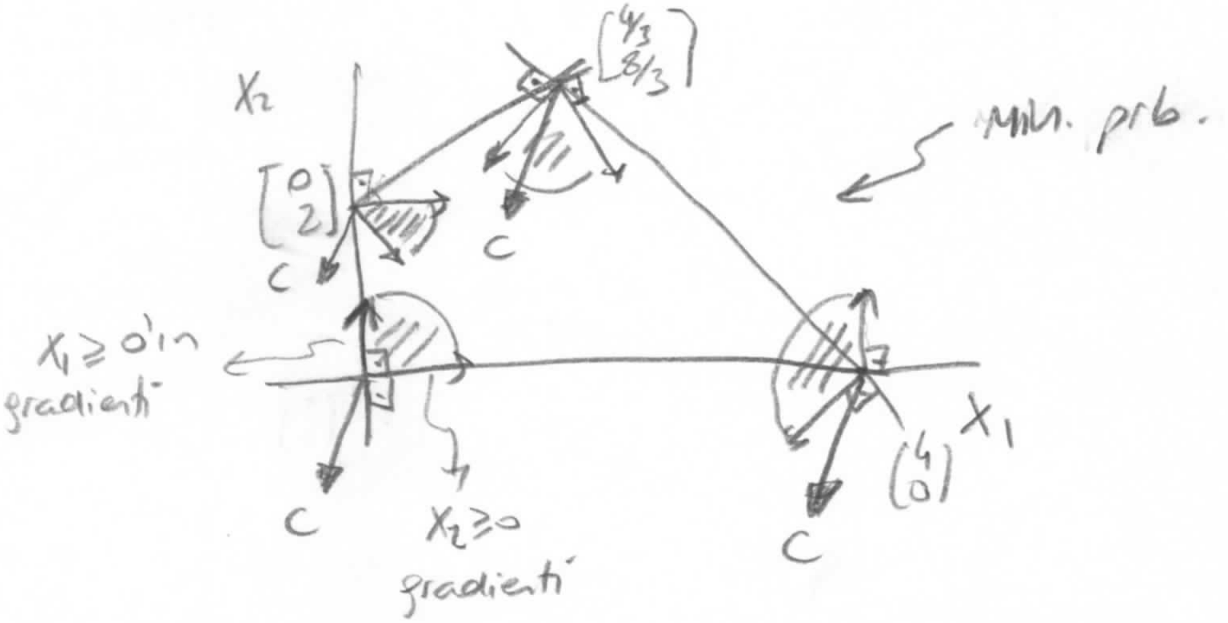
$uG = c,\ u \geqslant 0$ sistemini aşağıdaki gibi yazarız

$$\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c \qquad (5.21)$$

$$w_i \geqslant 0,\ i \in I \quad v_j \geqslant 0,\ j \in J \qquad (5.22)$$

- Eşitlik 5.21 ve 5.22, $\bar{x}$'in olurlu olma kısıtıyla beraber, KKT optimalite şartlarını oluşturur.

- Geometrik olarak; 5.21 ve 5.22, herhangi bir $\bar{x}$'in optimal olması için, c vektörü $\bar{x}$'ı sınırlayıcı (kısıtların gradientlerinin) doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilmeli ≡ Bu kısıtların oluşturduğu huninin içinde olmalı der.



– Tersi durumu göz önüne alalım; (KKT geçerliyse optimaldir)

$\hat{x}$; başka bir mümkün çözüm olsun

(5.21) in her iki tarafından $(\hat{x}-\bar{x})$'la çarparsak;

$$c\hat{x} - c\bar{x} = \sum_{i \in I} w_i \underbrace{(a^i\hat{x} - b_i)}_{a^i\bar{x}=b_i} + \underbrace{\sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x}}$$

$$v_j e_j(\hat{x}-\bar{x}) = v_j(e_j\hat{x} - \underbrace{e_j\bar{x}}_{0})$$

$a^i\hat{x} \geq b_i$ dir. ($\hat{x}$ bir mümkün çözüm olduğundan)

ve $e_j\hat{x} \geq 0$ { $\hat{x} \geq 0$ sıfır }.

$\Rightarrow c\hat{x} - c\bar{x} \geq 0 \Rightarrow c\hat{x} > c\bar{x}$ (her $\hat{x}$ mümkün çözüm için).

ve dolayısıyla $\bar{x}$ optimaldir.

$\Rightarrow$ Bir $\bar{x}$, optimalse KKT'yi sağlar

ve bir $\bar{x}$ KKT'yi sağlıyorsa optimaldir

(Her iki durumuda gösterdik)

$\Rightarrow$ Bir $\bar{x}$ <u>ancak ve ancak</u> KKT şartlarını sağlıyorsa optimaldir. (5.21, 5.22 ve olurluk şartları optimallik için gerek ve yeter şartlardır)

* KKT ve olurluluk kısıtları aşağıdaki gibi yazılabilir ;

$W = (w_1, w_2, \dots w_m) \geq 0$ ve $V = (V_1 V_2 \dots V_n) \geq 0$.

(Burada sınırlayıcı olmayan kısıtlar için $w_i = 0$ ve $V_j = 0$ olacaktır)

$(5.21) \rightarrow wA + VI = C$ $\left(\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} V_j e_j = c \right)$

olarak yazılır. $\Rightarrow wA + V = C$

<u>KKT optimalite şartları;</u>

① $AX \geq b$, $X \geq 0$ (5.23) Primal olurluluk kısıtı (primal feasibility)

② $wA + V = C$, $w \geq 0$, $V \geq 0$ (5.24) Dual olurluluk kısıtı. (Dual feasibility)

③ $w(AX - b) = 0$ $VX = 0$ → (5.25) Tamamlayıcı boşluk kısıtı (complementary slackness)

($w, V \equiv$ dual değişkenler Lagrange çarpanları)

③. kısıt; Eğer bir satır sınırlayıcı değilse ($a_i X > b_i$ veya $X_j > 0$ ise) ilgili w_i veya V_j in sıfır olmasını sağlar.

$w_i (a^i X - b_i) = 0$; $a^i x - b_i > 0 \Rightarrow w_i = 0$ olur.

$V_j X_j = 0$; $X_j > 0 \Rightarrow V_j = 0$ olur

Örn 5.7 Min $-x_1 - 3x_2$

s.t.

$$x_1 - 2x_2 \geq -4$$

$$-x_1 - x_2 \geq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Herhangi bir noktanın KKT yardımıyla optimal olup olmadığını belirlemek

* (0,0) noktası optimalmidir.

- 5.23 sağlanır, (0,0) olurlu bölgede bir nokta
- 5.24 'e bakalım

(0,0) da iki kısıtta sınırlayıcı değil

$\Rightarrow w_1 = 0, w_2 = 0$ anlamına gelir (5.25'e göre)

(0,0) da iki işaret kısıtıda sınırlayıcı

$\Rightarrow v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$ olmalıdır.

$wA + v = c \Rightarrow v = c \quad (w_1 = w_2 = 0)$

$\Rightarrow v = (-1, -3)$ bu $v \geq 0$ sağlamaz

$\Rightarrow$ (0,0) çözümü 5.24'i sağlayamaz

dolayısıyla optimal olamaz.

* $(4/3, 8/3)$ noktasına bakalım (Bu nokta optimal)

 - 5.23 sağlanır (Bu nokta durulu bir nokta)

 - 5.25'e göre;

 * $x_1 > 0$, $x_2 > 0 \Rightarrow v_1 = 0$, $v_2 = 0$ (işaret kısıtları sınırlayıcı değil olduğundan)

 * ilk iki kısıt sınırlayıcı

 $\Rightarrow w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$

 - 5.24'e göre

$$wA + v = c \quad (v=0) \Rightarrow c - wA = 0$$

$$(-1,-3) - (w_1, w_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -w_1 + 2w_2 &= 1 \\ 2w_1 + w_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_1 = 2/3 \geq 0, \; w_2 = 5/3 \geq 0$$

$w \geq 0$ sağlanıyor.

$\Rightarrow$ 5,24'ü sağlayan çözüm var

3 şartta sağlanıyor $\Rightarrow$ Bu nokta optimaldir.

Örn 5.8 KKT şartlarının geometrik yorumu.

Min $-x_1 - 3x_2$

s.t.

$x_1 - 2x_2 \geq -4$

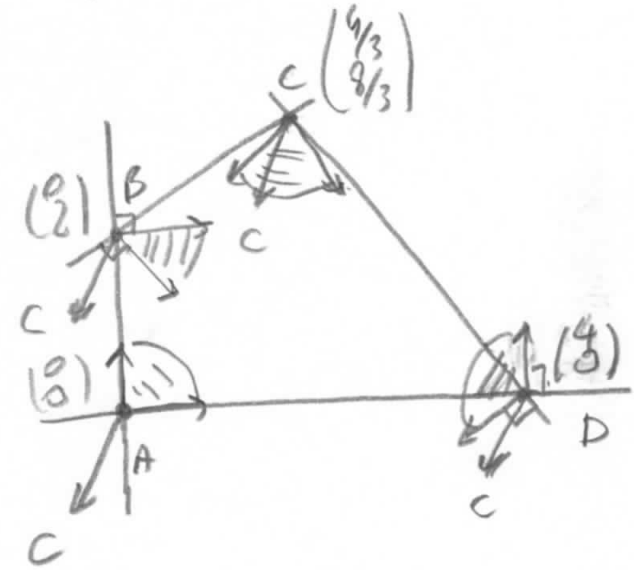
$-x_1 - x_2 \geq -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Amacın ve kısıtların gradientleri

$c = (-1, -3)$

$$\underbrace{\begin{aligned} a^1 &= (1,-2) \\ a^2 &= (-1,-1) \end{aligned}}_{\text{kısıtlar}} \quad \underbrace{\begin{aligned} e_1 &= (1,0) \\ e_2 &= (0,1) \end{aligned}}_{\text{işaret kısıtları}}$$



$$\sum_{i \in I} w_i \bar{a}^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c$$

$w_i \geq 0 \quad , \quad v_j \geq 0$.

I : sınırlayıcı kısıt seti

J : sınırlayıcı işaret kısıt seti

A noktası : c vektörü sınırlayıcı kısıtlar olan işaret kısıtlarının gradientlerinin oluşturduğu huninin içinde değil $\Rightarrow$ A opt. olamaz.

B noktası : Sınırlayıcı kısıtlar $x_1 - 2x_2 \geq -4$, $x_1 \geq 0$ ve c vektörü bu kısıtların gradientlerinin oluşturduğu hunide değil $\Rightarrow$ B opt olamaz.

C noktasında : c vektörü $x_1 - 2x_2 \geq -4$ ve $-x_1 - 2x_2 \geq -4$ kısıtlarını gradientlerinin oluşturduğu huninin içinde

$$\equiv \sum_{i \in I} w_i \bar{a}^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c, \quad w_i \geq 0, \; v_j \geq 0$$

sisteminin çözümü var.

C optimal nokta

Eşitlik kısıtı durumunda KKT şartları;

Min CX

s.t.

$AX=b$

$X \geq 0$

$AX=b$ yi $AX \geq b$, $-AX \geq -b$ şeklinde formüle edersek, daha önce geliştirdiğimiz KKT şartları aşağıdakine dönüşür;

$$AX=b , \quad X \geq 0 \qquad (5.26)$$

$$wA + v = c , \quad w \text{ unrestricted} , \quad v \geq 0 \qquad (5.27)$$

$$vX = 0 \qquad (5.28)$$

Daha öncekine göre fark: burada $AX=b$ kısıtlarına karşılık gelen w ların işaret kısıtı olmamasıdır.

Bir Temel mümkün çözümün optimalliği:

Min CX

s.t

$AX=b$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ bir t.m.ç. olsun ve temel matris te B olsun

$X \geq 0$

(5.26) sağlanır ($\bar{X}$ bir t.m.ç. olduğundan).

$-5.27 \quad C - WA - V = 0$

$$= (C_B, C_N) - W(B, N) - (V_B, V_N) = (0, 0) \quad (5.29)$$

5.28'i sağlamak için (tamamlayıcı boşluk koşulu, complementary slackness) $VX = 0$ olmalı

$$X_N = 0 \Rightarrow VX = (V_B, V_N)(X_B, X_N) = 0.$$

$$V_B X_B + V_N \overset{0}{X_N} = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 0}$$

(5.29)'u tekrar yazarsak;

$$C_B - wB = 0 \Rightarrow \underline{w = C_B B^{-1}}$$

$$C_N - wN - V_N = 0 \qquad V_N = C_N - wN$$

$$\underline{V_N = C_N - C_B B^{-1} N}$$

(5.26) sağlanır.

(5.28) $V_B = 0$ alırsak sağlanır ($X_N = 0$).

(5.27) $wA + V = C \Rightarrow w = C_B B^{-1}$ ve $V_N = C_N - C_B B^{-1} N$ ($V_B = 0$) yazarsak sağlanır.

W: kısıtsız $\rightarrow$ sorun çıkarmaz

$V_N \geq 0$ olmalıdır. $\leftarrow$ KKT için gerekli tek şart bu kalır.

$U_N \equiv C_j - Z_j$ değerleridir (temel olmayan değişkenler için.

yani ; Bir t.m.ç.'nin KKT şartlarını sağlayıp optimal olması için

$V_N = C_N - C_B B^{-1} N$ $(c_j - z_j)$ değerlerinin

≥ 0 olması gereklidir ve yeterlidir.

$\Rightarrow$ Bu simplekste gördüğümüz optimallik şartıyla aynıdır.

Dolayısıyla simplex metodda;

(5.26) her zaman korunur (primal feasibility)

$AX = b$, $X \geq 0$.

(5.28) (complementary slackness) tamamlayıcı boşluk kısıtı da her zaman korunur.

$VX = 0$ $\quad (V_B = 0,\ X_N = 0)$

(5.27) dual feasibility'ye ulaşılmaya çalışılır.

$wA + V = C$, $V \geq 0$.

$w = C_B B^{-1}$, $V_B = 0$, $V_N = C_N - C_B B^{-1} N$

($V_N \geq 0$ ise ulaşılmış olur)

Lagrange çarpanlarını simpleks tablosundan bulma;

* $V_B = 0$, $V_N = C_N - C_B B^{-1} N$

V_j = Tablodaki sıfır satırının "negatifle" çarpılmış hali.

* $w = C_B B^{-1}$ idi.

A matrisinin birim matris oluşturan kolonları var ise sıfır satırında;

$C_B B^{-1} I - \hat{c} = w - \hat{c}$ olacaktır ($\hat{c}$ birim matrise karşılık gelen değişkenlerin amaç katsayıları)

=) Dolayısıyla bu kolonlardaki sıfır satırı değerlerine $(w - \hat{c})$ $\hat{c}$ ekler ise

$w - \hat{c} + c = w$ elde ederiz.

Örn: Farka's lemma geometrik gösterimi;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = [2, 4] \qquad a^1 = [3\ 2] \quad a^2 = [1\ -1] \quad a^3 = [1\ -2]$$

Sistem I $\quad AX \geq 0, \quad CX < 0$

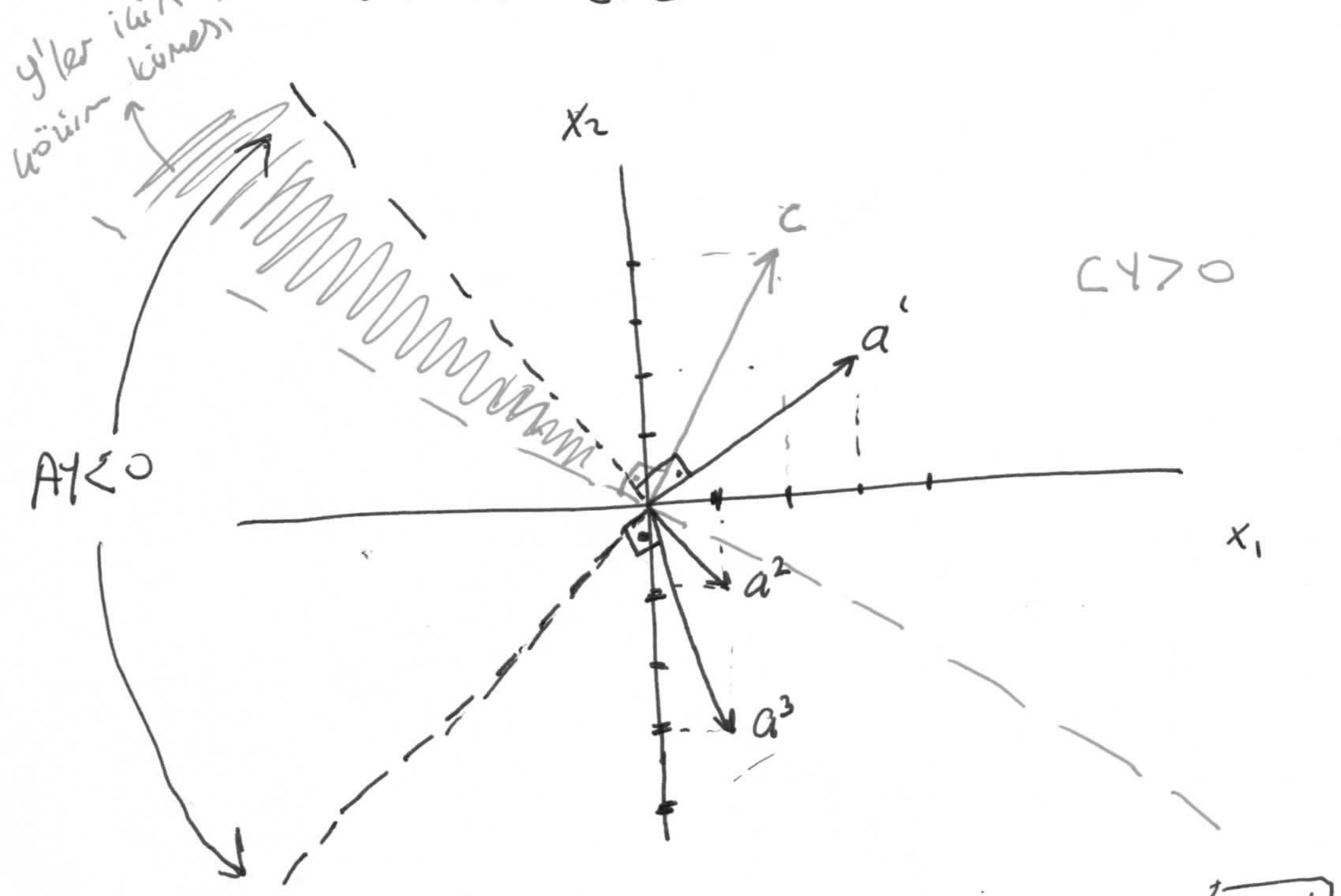
$y = -X$ olsun $\Rightarrow$ $AY \leq 0, \quad CY > 0$

$$AY \leq 0 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv (y_1\ y_2)\, a^1 \leq 0$$

$$(y_1\ y_2)\, a^2 \leq 0$$

$$(y_1\ y_2)\, a^3 \leq 0$$



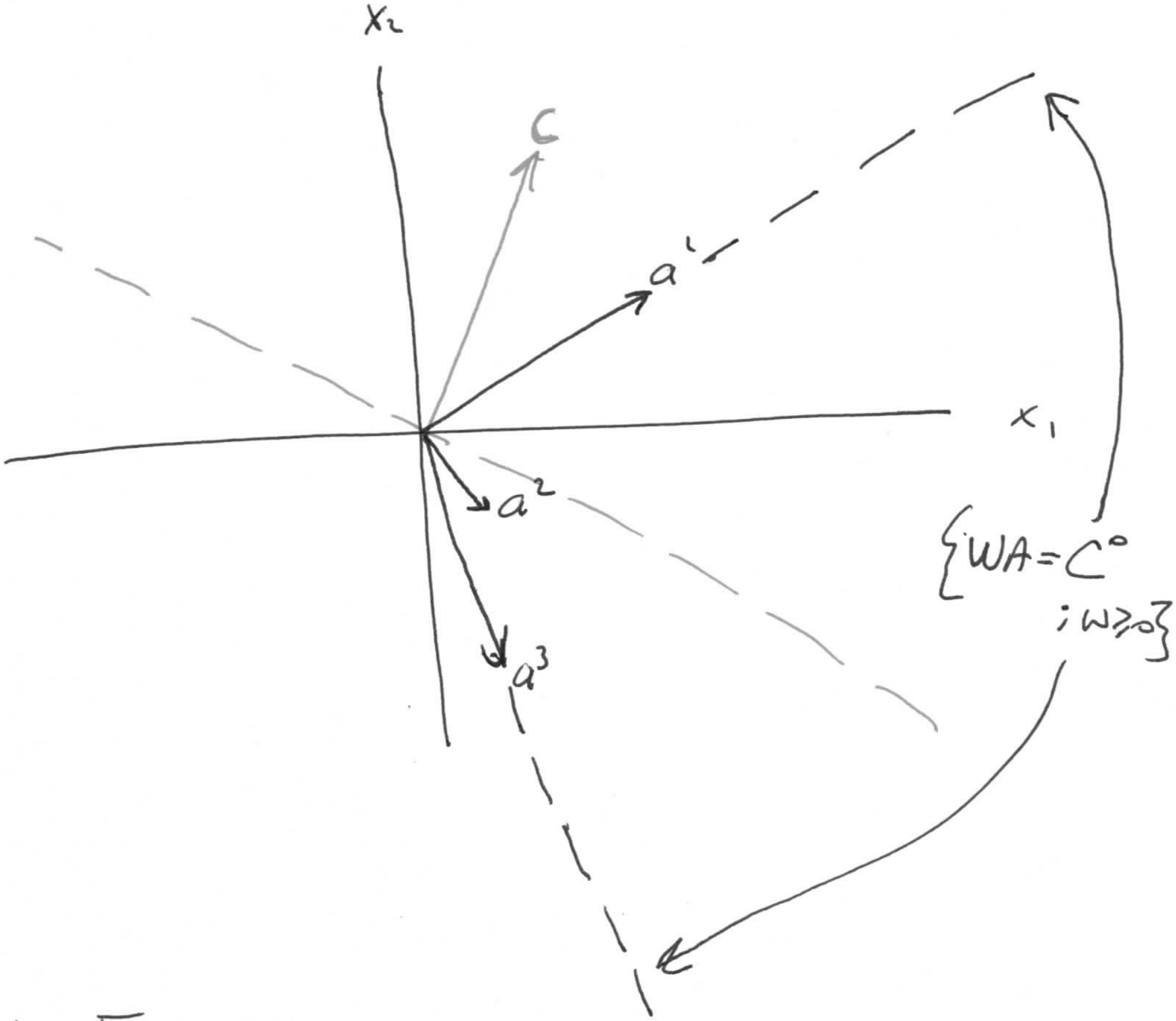
Sistem I'in çözümü VAR. CY<0 $\quad \boxed{X = -Y}$

Sistem II $wA = c$, $w \geqslant 0$.

$$[w_1, w_2, w_3] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [2, 4] \qquad (w_1, w_2, w_3) \geqslant 0$$

$$\equiv w_1[3,2] + w_2(1,-1] + w_3(1,-2] = [2,4]$$

$$= \sum w_i a^i = c$$



System II çözümsüz.