Pitezi 3:00–5:30

7.3, 7.9, 7.12

6.53, 6.55, 6.2

(1)

7.1 Ayrışım Algoritması ;

— Büyük boyutlu problemlerin sistematik olarak çözüme metodolojisi.

— Bir çok problemde kısıtlar özel bir yapıya sahip olanlar ve zor kısıtlar olarak sınıflandırılabilir.

$$\text{Min } \quad cx$$

$$\text{s.t.}$$

$Ax=b \} \rightarrow$ zor kısıtlar (A $m\times n$ matris)

$x\in X \} \rightarrow$ özel yapıya sahip kısıtlar.

(özel bir yapı olmasında şart değil)

X : polihedral set. Sınırlı bir set. $x_1, x_2, x_3 \dots x_t$ bu setin uç noktaları. Herhangi bir $x \in X$ noktası aşağıdaki gibi gösterilebilir ;

$$x = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \ , \quad \lambda_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots t.$$

Bu x'i yukardaki optimizasyon probleminde yerine yazarsak;

$$\text{Min } \sum_{j=1}^{t} (cx_j)\lambda_j$$

s.t.

m kısıt $\Big\{ \quad \sum_{j=1}^{t} (Ax_j)\lambda_j = b$ ← Değişkenler λ_j'e dönüştü

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

+1

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots t$$

$x_1, x_2 \dots x_t$'lerin sayısı genelde çok fazla olacağından bu uç noktaların hepsini bularak çözmeye çalışmak pratik olmaz. Biz bu optimizasyon problemini tüm uç noktaları bulmadan çözmeye çalışacağız.

Revise simplex'i uygulayalım;

Bir Temel mümkün çözüm $\Rightarrow A = (A_B, A_N)$

$B^{-1}_{(m+1)x(m+1)}$ bilindiğini varsayarsak

Basis inverse

(w, α)	$\hat{C}_B \bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

$(w, \alpha) = \hat{C}_B B^{-1}$

$\hat{C}_B$ = temel değişkenlerin maliyet katsayısı

$\hat{C}_j = CX_j$

$\bar{b} = B^{-1}\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$

$z_k - \hat{C}_k$'yi temel olmayan değişkenler için hesaplarız; Bunlardan maximumu;

$$z_k - \hat{C}_k = \max_{1 \le j \le t} (z_j - \hat{C}_j) = \max (w, \alpha) \begin{bmatrix} AX_j \\ 1 \end{bmatrix} - CX_j$$

$$= \max_{1 \le j \le t} wAX_j + \alpha - CX_j$$

Temel değişkenler için $z_j - \hat{C}_j = 0$ olacağından

~~bu~~ bu maximum ≥ 0 olacaktır. Maksimizasyon sonucu;

— Eğer $z_k - \hat{c}_k = 0 \Rightarrow$ optimal çözüm (mevcut çözüm) demektir

çünkü $z_j - \hat{c}_j \leq 0$ for non-basic variables.
anlamı çıkar.

— Eğer $z_k - \hat{c}_k > 0 \Rightarrow$ Temel olmayan değişken

λ_k'nın değeri sıfırdan arttırılmalıdır.

Bu arttırılacak değişkenin indeksi k'yı yukardaki şekilde belirlemek imkansızdır hemen hemen, çünkü uç noktaların sayısı çok fazla olacaktır. Bu nedenle aşağıdaki opti problemi kullanılır.

$$\max_{1 \leq j \leq t} (wA - c)x_j + \alpha = \max_{x \in X} (wA - c)x + \alpha$$

~~Ki x_j~~ X setinin uç noktalarını "explicitly" bulmadan X seti içinde bir optimizasyon problemine dönüştürmek. Bir temel mümkün çözüm $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$ ve karşılık gelen dual değerler (w, α) verildiğinde aşağıdaki sub-problemi (ki çözümü X seti özel yapıda olduğundan, kolay olan) çözülür.

$$\max \ (wA - c)x + \alpha$$
$$\text{s.t.}$$
$$x \in X$$

Amaç fonksiyonunda α sabittir. Bu başlangıç z'değerini sıfır yerine α'ya eşitlememizi gerektirir.

Bu opt. problemi sonucunda $z_k - \hat{c}_k$ elde edilir

- Eğer $z_k - \hat{c}_k = 0 \Rightarrow \lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$ optimal çözümdür.
- Eğer $z_k - \hat{c}_k > 0 \Rightarrow \lambda_k$ çözüme girmesi gerekir.

λ_k'nın kolonu $\begin{pmatrix} AX_k \\ 1 \end{pmatrix}$, B^{-1} le çarpılarak güncellenir.

$$y_k = B^{-1}\begin{pmatrix} AX_k \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y_k \leq 0 \text{ olamaz } X \text{ sınırlı bir set olduğundan})$$

- Bu kolon $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$ "master" problemin çözümünde revise simplex tablosuna eklenir. λ_{B_r}; ej temelden çıkacak değişken min. oran testiyle belirlenir, ve pivotlama yapılır. Proses tekrarlanarak çözüm aranır

  - master problem adımı daha iyi bir t.m.ç.'e adım atmamızı sağlar
  - sub-problem $z_k - \hat{c}_k \leq 0$ olup olmadığını belirler yada "most pozitif" $z_j - c_j$'yi belirler.

Mevcut çözümle alt sınır arasındaki fark yeterince küçükse durabiliriz.

Sub-problemi de alalım.

$$\max \ (wA-c)x+\alpha$$

s.t.

$$x \in X$$

optimal çözüm $z_k-\hat{c}_k$ olsun. Bu durumda

$$(wA-c)x+\alpha \le z_k-\hat{c}_k \quad \text{for } x \in X$$

Tüm x'ler $Ax=b$'yi de sağlamak zorunda olduğundan;

$$cx \ge wAx-(z_k-\hat{c}_k)+\alpha = wb+\alpha-(z_k-\hat{c}_k)$$

$$=\hat{c}_B\bar{b}-(z_k-\hat{c}_k)$$

Bu her $x\in X$ ve $Ax=b$ için geçerli olduğundan

$$\min_{\substack{x\in X\\ Ax=b}} cx \ge \underline{\hat{c}_B\bar{b}-(z_k-\hat{c}_k)}$$

optimal için alt sınır. (Monoton olarak azalmaz)

$\hat{c}_B\bar{b} \rightarrow$ mevcut çözüm (en iyi üst sınır.)

Ayrışım metoduyla ilgili notlar;

- Sub-problem her adımda revize simplex tablosuna eklenecek $\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$ kolonunu ürettiğinden bir metod (Dantzig-Wolfe) kolon üretme metodu olarakta anılır. (column generation)

- Her iterasyonda sub-problem için bir önceki iterasyondaki çözüm başlangıç t.m.ç. olarak alınabilir. Sıfır satırı yeni w, α değerlerine göre güncellenir.

- Sub-problem tam olarak optimize edilmesine gerek yoktur. Sadece mevcut uç çözüm x_k için $z_k - \hat{c}_k = (wA - c)x_k + \alpha > 0$ olması yeterlidir. Bu gerekliyse λ_k tabana girmeye aday bir değişkendir.

(Bir sonraki sayfa buraya girecek)

☆ Alt sınırın hesaplanması ve kullanımı;

- Bu ayrışım metodunu kullanırken genelde çözüm zamanını kısaltmak için optimale yeterince yaklaşınca iterasyonları durdurabiliriz. Genelde so %1-5 geliştirme uzun zaman alır. Optimale ne kadar yakın olduğumuzu anlamak için alt sınırı kullanırız.

(5.5)

— Eğer master kısıtları eşitsizlikler içeriyorsa, $z_j - c_j$ "slack" değişkenler için de kontrol edilmelidir (alt-problemin çözümünde ele olarak.)

— Eğer master kısıtı i $\leq$ ise

$$z_{s_i} - c_{s_i} = (w, \alpha)\begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = w_i$$

$\Rightarrow w_i > 0$ ise s_i temele girer.

— Eğer " — i $\geq$ ise

$$z_{s_i} - c_{s_i} = (w, \alpha)\begin{pmatrix} -e_i \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -w_i$$

$\Rightarrow w_i < 0$ ise s_i temele girer.

Örnek;

$$\text{Min } -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

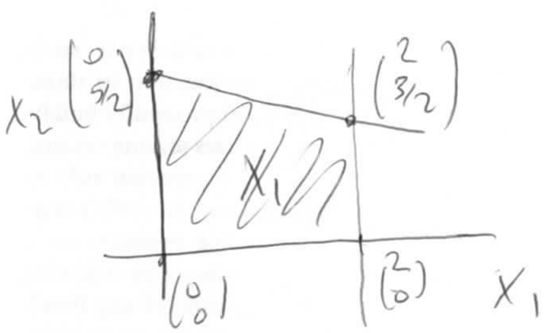
s.t.

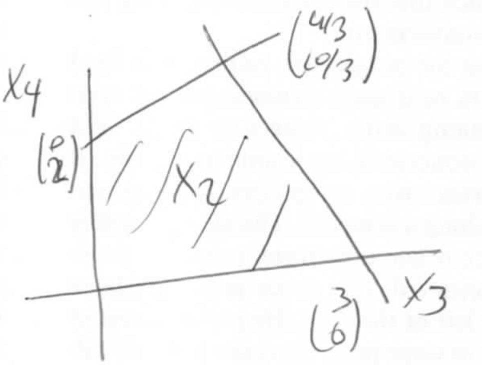
$$\begin{aligned}
x_1 \quad + x_3 \quad &\leq 2 \quad (1)\\
x_1 + x_2 \quad + x_4 &\leq 3 \quad (2)\\
x_1 \quad &\leq 2 \quad (3)\\
x_1 + 2x_2 \quad &\leq 5 \quad (4)\\
-x_3 + x_4 &\leq 2 \quad (5)\\
2x_3 + x_4 &\leq 6 \quad (6)\\
x_i &\geq 0
\end{aligned}$$

X seti (3),(4),(5),(6) ve pozitiflik kısıtlarından oluşsun

3,4 → x_1, x_2 var 5,6 → x_3, x_4 var çözümü kolay bir problem.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$





$x \in X$ ~~[illegible]~~ için (ilk iki değer $\in X_1$, son iki değer $\in X_2$)

Başlangıç adımı;

$x_1, x_2 \dots x_t$, X setinin uç noktaları.

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{t} \hat{c}_j \lambda_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{t} (Ax_j)\lambda_j + s = b$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \dots t$$

$$s \geq 0$$

Başlangıç temeli; (s, λ_1) λ_1 ; $x_1 = (0,0,0,0)$ a karşılık gelen λ değişkeni.

$cx_1 = 0$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} = 0 B^{-1} = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{b} = B^{-1}\binom{b}{1} = \binom{b}{1}$$

$(w_1 w_2 \alpha) = (0, 0, 0)$

	Temelin Tersi			S.T.
z	0	0	0	0
s_1	1	0	0	2
s_2	0	1	0	3
λ_1	0	0	1	1

İterasyon 1

$(w_1, w_2) = 0$

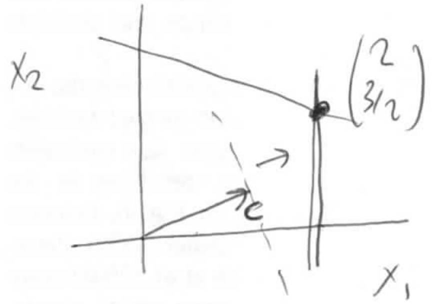
Sub problem

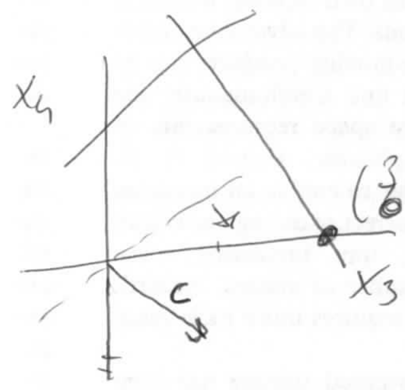
$\max (wA - c)x + \alpha$ $\quad$ $\max\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0$

s.t. $\quad$ c) $\quad$ s.t.

$x \in X$ $\quad$ $x \in X$ (3, 4, 5, 6 ve pozitiflik kısıtları)

Bu problem iki parçalı (x_1, x_2) olarak çözülebilir.





$x_2 = (2, \frac{3}{2}, 3, 0)$ opt. çözüm sub-problem için.

$z_2 - \hat{c}_2 = \frac{17}{2}$ = obj. of sub-problem.

Altsınır $= \hat{c}_B b - (z_2 - \hat{c}_2) = 0 - 17/2 = -17/2$

Master adımı;

$z_2 - \hat{c}_2 = 17/2$ $\quad$ $A x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} A x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $y_2 = B^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

oluşturulan kolon $\begin{pmatrix} z_2 - \hat{c}_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline s_1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \lambda_2 \\ 17/2 \\ \hline 5 \\ 7/2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} z & -17/10 & 0 & 0 & -17/5 \\ \hline \lambda_2 & 1/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ s_2 & -7/10 & 1 & 0 & 8/5 \\ \lambda_1 & -1/5 & 0 & 1 & 3/5 \end{array}$$

şu anki çözüm;

$$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 3/5(0,0,0) + 2/5(2, 3/2, 0) = (4/5, 3/5, 6/5, 0)$$

$$obj = -17/5 \qquad (w_1, w_2, \alpha) = (-17/10, 0, 0)$$

$$w_1 < 0 \Rightarrow s_1 \qquad (z_{s_1} - c_{s_1} = w_1 \ (\leq \text{kısıtı}))$$

temele girmez.

Sub-problem;

$$(wA - c) = (-17/10, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (-2, -1, -1, 1)$$
$$= (3/10, 1, -7/10, -1)$$

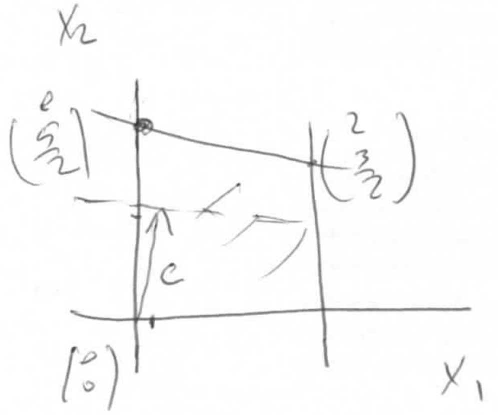
$$\max (wA - c)X + \alpha$$
$$\Rightarrow \max 3/10 x_1 + x_2 - 7/10 x_3 - x_4 + 0$$

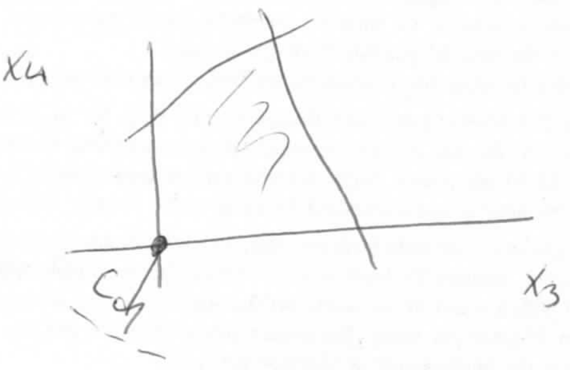
s.t.

$x \in X$ (3, 4, 5, 6, ve ≥ 0 kısıtları)

- Aynı şekilde grafiksel olarak iki ayrı prb. şeklinde çözülebilir;

Çözüm; $X_3 = (0, 5/2, 0, 0)$





$$z_3 - \hat{c}_3 = 5/2 = 3/10 \cdot 0 + 1 \cdot 5/2 + 7/10 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0$$

$$= 5/2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_3 \text{ temele girecek.}$$

Alt sınır $= \hat{c}_B b - (z_3 - \hat{c}_3) = -\frac{17}{5} - \frac{5}{2} = -5.9$ (~~[illegible]~~ ~~alt sınır~~ ~~(sınırlardan)~~)

Master adımı;

$$z_3 - \hat{c}_3 = 5/2 \qquad AX_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = B^{-1} \begin{pmatrix} AX_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -7/10 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	Temelin tersi			ST.	λ_3
z	$-17/10$	0	0	$-17/5$	$5/2$
λ_2	$1/5$	0	0	$2/5$	0
s_2	$-7/10$	1	0	$8/5$	$5/2$
λ_1	$-1/5$	0	1	$3/5$	1

z	$-6/5$	0	$-5/2$	$-49/10$
λ_2	$1/5$	0	0	$2/5$
s_2	$-1/5$	1	$-5/2$	$1/10$
λ_3	$-1/5$	0	1	$3/5$

şu anki çözüm $X = \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$

$= 2/5 (2, 3/2, 3, 0) + 3/5 (0, 5/2, 0, 0)$

$= (4/5, 21/10, 6/5, 0)$

$obj = -49/10 = -4.9 \qquad (w_1, w_2, \alpha) = (-6/5, 0, -5/2)$

<u>Iterasyon 3</u>

$w_1 < 0 \Rightarrow s_1$ temele giremez $\quad (z_{s_1} - c_{s_1} = w_1)$

<u>sub-problem;</u>

$$wA - c = (-6/5, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (-2, -1, -1, 1) = (4/5, 1, -1/5, -1)$$

$$\max \ 4/5 x_1 + x_2 - 1/5 x_3 - x_4 - 5/2$$

s.t.

$x \in X$

$X_4 = (2, 3/2, 0, 0) \qquad z_4 - \hat{c}_4 = 3/5 \Rightarrow \lambda_4$ temele girmeli.

Alt sınır $= \hat{c}_B \bar{b} - (z_4 - \hat{c}_4) = -\frac{49}{10} - 3/5 = -5.5$. Bilinen en iyi çözüm $= -4.9 \Rightarrow$ optimal çözüm aralığı $\in (-5.5, -4.9)$

isterse burada durulabilir. (Yeterince iyi bir çözüm bulunduğu düşünülüyorsa)

Master adımı;

$$z_4 - \hat{c}_4 = 3/5 \quad y_4 = B^{-1}\begin{pmatrix} Ax_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & -5/2 \\ -4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

				RHS	λ_4
z	$-4/5$	0	$-5/2$	$49/10$	$3/5$
λ_2	$1/5$	0	0	$2/5$	$2/5$
s_2	$-4/5$	1	$-5/2$	$1/10$	$3/5$
λ_3	$-4/5$	0	1	$3/5$	$3/5$

				RHS
	-1	-1	0	-5
λ_2	$1/3$	$-2/3$	$5/3$	$1/3$
λ_4	$-1/3$	$5/3$	$-25/6$	$1/6$
λ_3	0	-1	$7/2$	$1/2$

mevcut çözüm $\Rightarrow X = \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4$

$$= 1/3\, X_2 + 1/6\, X_3 + 1/2\, X_4 = (1, 2, 1, 0)$$

$$obj = -5 \qquad (w_1, w_2, \alpha) = (-1, -1, 0)$$

~~w_1~~ iterasyon 4

$w_1 < 0,\ w_2 < 0 \Rightarrow s_1, s_2$ tabana girmez.

Sub-problem;

$$\max\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_3 + 0 \qquad (\max\ (wA - c)x + \alpha)$$

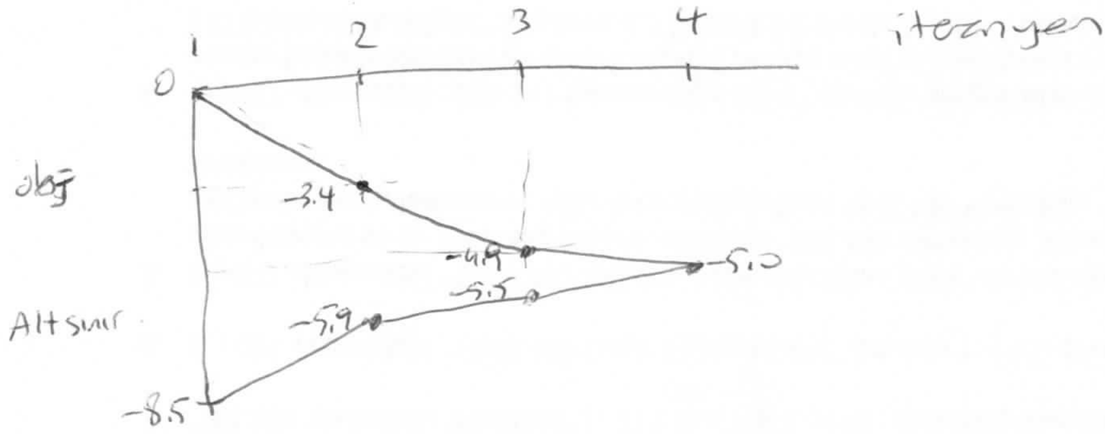
s.t.

$$x \in X \Rightarrow x_5 = (0, 0, 0, 0) \qquad z_5 - \hat{c}_5 = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ mevcut çözüm optimal

Alt sınır $= -5 - 0 = -5 =$ mevcut çözüm değeri optimal çözüm $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 0)$ obj $= -5$

obj. değer ve alt sınırın hareketi



7.4 X setinin sınırsız olduğu durum;

- Bir önceki kısımdan X setinin sınırsız olduğunu varsaydık. eğer X sınırsız olsaydı, X'teki noktaları uç noktalar ve uç yönler kullanarak ifade edecektik.

$$X = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1 \ldots t$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1 \ldots l$$

x_j = uç noktalar $\quad d_j$ = uç yönler

Original problem;

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{t} (cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (cd_j)\mu_j$$

s.t.

s.t.

$$\sum_{j=1}^{t} (Ax_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{\ell} (Ad_j)\mu_j = b \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \qquad (2).$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1,2..t$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j=1,2,...\ell$$

t and l are usually very large.

Bu problemin bir temel min. çözümü için;

B → temel matris ve W, α (1) ve (2) ye

karşılık gelen dual değişkenler olsun.

$$(w,\alpha) = \hat{C}_B B^{-1} \quad \bar{b} = B^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

revised simplex;

w, α	$\hat{C}_B \bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

eğer $z_j - c_j \leq 0 \Rightarrow$ optimal solution.

optimalite şartları;

1) Temel olmayan λ_j'ler için $z_j - \hat{c}_j = (w,\alpha)\begin{pmatrix} Ax_j \\ 1 \end{pmatrix} - cx_j \leq 0$

$$= wAx_j + \alpha - cx_j \leq 0$$

2) Temel olmayan μ_j'ler için $z_j - \hat{c}_j = (w,\alpha)\begin{pmatrix} Ad_j \\ 0 \end{pmatrix} - cd_j \leq 0$

$$= wAd_j - cd_j \leq 0$$

Tüm uç noktaları ve yönleri üretip bu şartlara bakmak zor olacağından bunu bir sub-problem yardımıyla yaparız.

$$\max\ (wA - c)x + \alpha$$

s.t

$$x \in X$$

I. durum:

Eğer optimal çözüm bu sub-problem için sınırsızsa

Bu şu demektir: Bir extreme yön d_k vardır ve

$(wA - c)d_k > 0$ dır. Bu (2) optimalite şartının (temel

olmayan μ_j'lerle ilgili olan) sağlanmayacağı anlamına

gelir $\left(wA d_j - c d_j \leq 0\right)$. Bu durumda

$z_k - \hat{c}_k = (wA - c) d_k >$ 'a karşılık gelen μ_k temele

girmesi gerekir ve μ_k'nın kolonu $\begin{pmatrix} A d_k \\ 0 \end{pmatrix}$, B^{-1}'le çarpılıp

$\begin{pmatrix} z_k - \hat{c}_k \\ y_k \end{pmatrix}$ kolonu elde edilir.

II. durum:

Eğer optimal çözüm sub-problem için sınırlıysa

$(wA - c)\, d_j \leq 0$ demektir ve (2) optimalite şartı

sağlanıyor anlamı çıkar. (1) şartın sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Optimal çözüm x_k olsun

Eğer $z_k - \hat{c}_k \leq 0 \Rightarrow$ optimal çözüm (master problem için bulunmuş olur)

eğer $z_k - c_k > 0 \Rightarrow \lambda_k$ master problemlerde temele girdirilir.

Örnek 7.1

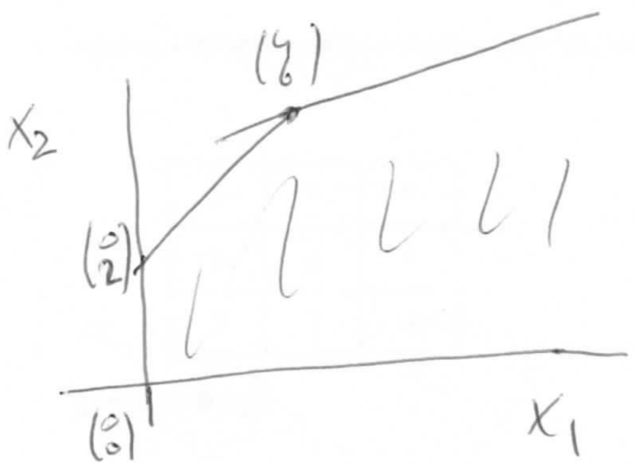
$$\text{Min} \quad -x_1 - 2x_2 - x_3$$

s.t.

$$\left.x_1 + x_2 + x_3 \leq 12\right\} \rightarrow Ax \leq b$$

$$\left.\begin{array}{ll} -x_1 + x_2 & \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 8 \\ x_3 & \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & \end{array}\right\} X \text{ seti}$$

X iki ayrı set şeklinde gösterilebilir.



— X seti sınırlı bir set değil. Problemi aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{t} (cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (cd_j)\mu_j$$

$$\sum_{j=1}^{t} (Ax_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (Ad_j)\mu_j \leq b \quad (+s = b)$$

$$\sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots t$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots l$$

$X_1 = (0,0,0)$ X seti içerisinde ve $AX_1 = 0+0+0 \leq 12$

kısıtların tümünü sağlıyor. Başlangıç çözümü olarak
ve X 'te bir uç nokta alınabilir.

~~bozca~~

$\lambda_1 \rightsquigarrow X_1$'e karşılık gelen değişken ve slack

değişken başlangıç temeli olarak alınacak.

Temel 2x2 'lik bir matris. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} = (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$

Basis inverse

z	0	0	0
s	1	0	12
λ_1	0	1	1

Sub-problem:

$$\max \ (wA - c)x + \alpha$$
s.t.
$$x \in X$$

$(w, \alpha) = (0,0)$; $A = (1,1,1)$

$$\max \ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.$$
s.t.

$-x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + x_2 \leq 8$

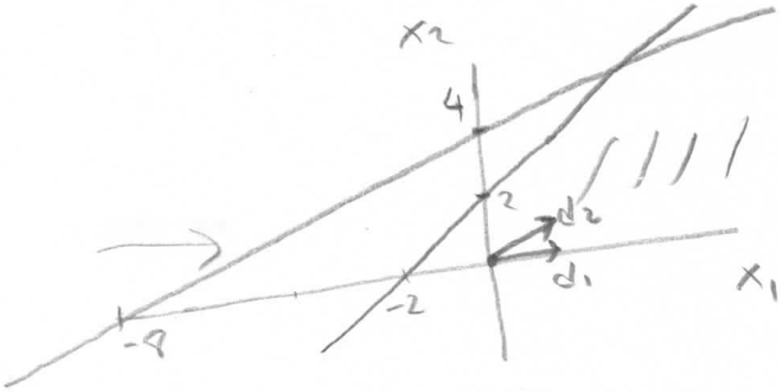
$x_3 \leq 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$ Bu problem iki optimizasyon problemine ayrılır (x_1, x_2) ve (x_3)

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &0 \le x_3 \le 3 \end{aligned} \Rightarrow x_3^* = 3$$

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &-x_1 + x_2 \le 2 \\ &-x_1 + 2x_2 \le 8 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



	z	x_1	x_2	x_4	x_5	RHS
z	1	-1	-2	0	0	0
x_4	0	-1	1	1	0	2
x_5	0	-1	2	0	1	8
z	1	-3	0	2	0	4
x_2	0	-1	1	1	0	2
x_5	0	1	0	-2	1	4
z	1	0	0	-4	3	16
x_2	0	0	1	-1	1	6
x_1	0	1	0	-2	1	4

→ x_4 temele girmeli

⇒ sınırsız çözüm ($y_4 < 0$).

x_4 1 birim artarsa
x_1 2 birim artar
x_2 1 birim artar.

uç yön $-(y_K) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sınırsız çözüm; (x_1, x_2) uzayından bir uç yön

$d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sınırsız çözüme yol alıyor.

(x_1, x_2, x_3) uzayından bir yön $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, çünkü

x_3 için bir ~~...~~ yön söz konusu olamaz $(x_3 \leq 3, x_3 \geq 0)$

$$z_1 - \hat{c}_1 = (wA - c)d_1 = 1(2) + 2(1) = 4$$ (− of new "ö" value for x_4)

$(wA - c)d_1 > 0$

$\Rightarrow \mu_1$ temele girmeli

Master adımı:

$z_1 - \hat{c}_1 = 4$, $Ad_1 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$

$$y_1 = B^{-1}\begin{pmatrix} Ad_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis Inverse

			RHS	μ_1
z	0	0	0	4
s	1	0	12	3
λ_1	0	1	1	0

$\Rightarrow$

z	$-4/3$	0	-16
μ_1	$1/3$	0	4
λ_1	0	1	1

İterasyon 2:

→ Kitap kopyası

İterasyon 2

$w = -\frac{4}{3}$ ve $\alpha = 0$

$w < 0 \Rightarrow s$ temele girmez

subproblem;

$$\text{Max } (wA - c)x + \alpha$$

s.t.

$$x \in X$$

Bu problem iki parçalı ele alınabilir.

S1: $\text{Max } -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 0$

s.t.

$-x_1 + x_2 \leq 2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

S2: $\text{Max } -\frac{1}{3}x_3$

s.t.

$0 \leq x_3 \leq 3$

$\left[(wA - c)x = -\frac{4}{3}(1,1,1) - (-1,-2,-1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right]$

- ($\alpha = 0 \rightarrow$ problemlerin sadece birisine eklenir)

- S2'nin çözüm basit $\Rightarrow x_3 = 0$
- S2'nin çözümü; (iki boşluk değişkeni ekleyip bir simpleks iterasyonu ile çözülür.

Bir simpleks sonrası (S2 için optimal çözüm)

	z	x_1	x_2	x_4	x_5	
z	1	0	0	0	1/3	8/3
x_2	0	0	1	-1	1	6
x_1	0	1	0	-2	1	4

opt. obj. değeri $z_2 - \hat{c}_2 = \underset{S1}{\frac{8}{3}} + \underset{S2}{0} = \frac{8}{3} > 0.$

$\Rightarrow \lambda_2$ master problemde tabana girmeli

$X_2 = (X_1, X_2, X_3) = (4, 6, 0) \rightarrow \lambda_2$'ye karşılık

gelen subproblemdeki uç nokta.

<u>Alt sınır;</u>

$$\hat{C}_B b - (z_2 - \hat{c}_2) = -16 - \frac{8}{3} = -\frac{56}{3}$$

<u>Master adımı:</u>

$$AX_2 = 10 \qquad y_2 = B^{-1}\begin{pmatrix} AX_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

			RHS	λ_2
z	$-4/3$	0	-16	$8/3$
μ_1	$1/3$	0	4	$10/3$
λ_1	0	1	1	1

$\rightarrow$

z	$-4/3$	$-8/3$	$-56/3$
μ_1	$1/3$	$-10/3$	$2/3$
λ_2	0	1	1

— opt. çözüm bulunmuş oldu.
($-56/3$'ün alt sınıra eşit çıktı.)

- Opt çözüm:

$$X = \lambda_2 X_2 = X_2 = (4, 6, 0)$$

- opt. çözümün subproblemler yoluyla doğrulanması;

$w = -4/3$, $\alpha = -8/3$

* Bir önceki iterasyondaki S_1 ve S_2'nin opt. çözümleri değişmez.

* $\alpha = -\frac{8}{3}$ olduğundan $z_3 - \hat{c}_3 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$

$\Rightarrow$ $z_k - c_k = 0$ olması mevcut çözümün (master problemin çözümü) optimal olması anlamına gelir.

7.5 Blok diyagonal yapı

Bir çok problemde (şebeke akış problemleri, kıt kaynakların yarışan aktiviteler paylaştırılması gibi) aşağıdaki yapı karşımıza çıkar. ($X = (X_1, X_2, X_3 \ldots X_T)$ olarak ayrıştırılmış)

$$\text{Min } c_1 \overset{\text{vektör}}{X_1} + c_2 X_2 + \cdots + c_T X_T$$

s.t.

$$
\begin{array}{lllll}
A X_1 + A_2 X_2 + \cdots + A_T X_T = b & & & & \\
B_1 X_1 & & & \le b_1 & \} X_1 \\
 & B_2 X_2 & & \le b_2 & \} X_2 \\
 & & \cdots \quad B_T X_T & \le b_T & \} X_T \text{ setleri}
\end{array}
$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_T \geq 0$$

Her bir diagonal blok bir X_i seti olarak alınırsa

$$X_i = \{ x_i : B_i x_i \le b_i \ , x_i \geq 0 \} \quad i = 1 \ldots T$$

subproblem i için $x_i \in X_i$ aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$x_i = \sum_{j=1}^{t_i} \lambda_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{l_i} \mu_{ij} d_{ij}$$

$$\sum \lambda_{ij} = 1$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad j = 1 \ldots t_i$$
$$\mu_{ij} \geq 0 \quad j = 1 \ldots l_i$$

x_{ij} ve d_{ij} ; X_i setinin uç noktaları ve uç yönleri

Modelde X_i 'nin yerine bu konulursa; orjinal proble

aşağıdaki master problemine dönüşür;

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{t_i} (c_i x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{l_i} (c_i d_{ij}) \mu_{ij}$$

s.t.

$$M \left\{ \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{t_i} (A_i x_{ij}) \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{l_i} (A_i d_{ij}) \lambda_{ij} = b \right.$$

$$T \left\{ \sum_{j=1}^{t_i} \lambda_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2 \ldots T \right.$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \qquad i = 1 \ldots T, \; j = 1 \ldots t_i$$

$$\mu_{ij} \geq 0 \qquad i = 1 \ldots T, \; j = 1 \ldots l_i$$

Daha önce tek bir set X varken şimdi T tane set

var. Basis $\Rightarrow B_{(m+T) \times (m+T)}$

Temelde her bloktan en az bir λ_{ij} olması gerekir.

$$(w, \alpha) = (w_1, \ldots w_m, \alpha_1 \ldots \alpha_T) = \hat{C}_B B^{-1}$$

$$\hat{C}_B = \hat{C}_{ij} \Rightarrow \hat{C}_{ij} = c_i x_{ij} \text{ for } \lambda_{ij}, \quad \bar{b} = B^{-1} \binom{b}{1}$$

$$\hat{C}_{ij} = c_i d_{ij} \text{ for } \mu_{ij}$$

w, α	$\hat{C}_B \bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

optimallik şartları;

Temel olmayan λ_{ij};

① $z_{ij} - \hat{C}_{ij} = w A_i x_{ij} + \alpha_i - c_i x_{ij} \leq 0$

Temel olmayan μ_{ij}

② $z_{ij} - \hat{C}_{ij} = w A_i d_{ij} - c_i d_{ij} \leq 0$

Bu şartları kontrol için aşağıdaki sub-problemler çözülür;

$$\text{Max} \quad (wA_i - c_i)x_i + \alpha_i$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_i \in X_i$$

(Her bir set X_i için bir subproblem)

− optimal sınırsızsa ⇒ Bu bir uç yön d_{ik} için $(wA_i - c_i)d_{ik} > 0$ demektir ki bu da uç yönlerle ilgili optimalite şartının yerine gelmediği anlamı taşır.

− Optimal sınırlıysa; $(wA_i - c_i)d_{ik} \leq 0$ anlamı taşır. yani uç yönle ilgili opt. şartı yerine gelmiş olur. Eğer
$z_{ik} - \hat{c}_{ik} = wA_i x_{ik} + \alpha_i - c_i x_{ik} \leq 0$ ise optimallik şartı (1) de sağlanmış olur (subproblem i için). Tüm subproblemler (1) ve (2) yi sağlıyorsa original problem için optimal çözüm bulunmuş olur.

Master problem slack değişkenlerini de içeriyorsa slack'lerin temele girip girmedikleri de kontrol edilmelidir.

Özetle:

- Her subproblemi ~~göz~~ i yi çöz.
  - sınırsız çözüm ⇒ d_{ik} ya karşılık gelen μ_{ik} temele girmeye aday
  - sınırlı çözüm ⇒ $wA_i x_{ik} + \alpha_i - c_i x_{ik} > 0$
    ⇒ λ_{ik} temele girmeye aday

Temele girmeye aday yoksa ⇒ optimal çözüm.

Alt sınır:

$$\hat{c}_B \bar{b} - \sum_i (z_{ik} - \hat{c}_{ik})$$

mevcut çözüm

subproblemlerin çözümleri toplamı

Örn 7.2:

Örn 7.2

$$\min \ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4$$

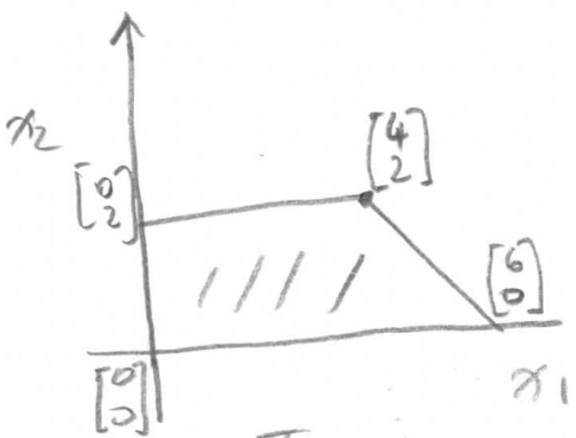
s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$

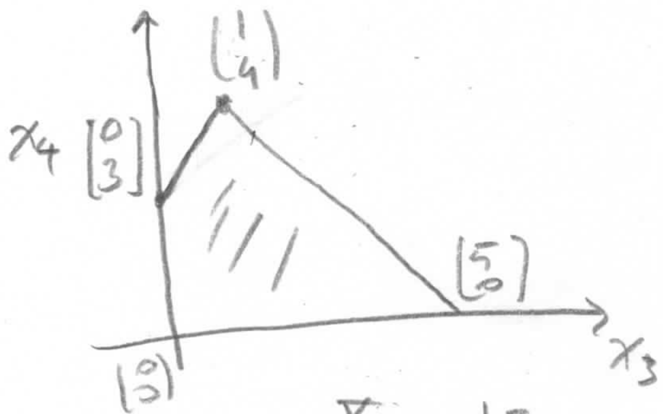
$$x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + x_2 & \leq 6 \\ x_2 & \leq 2 \\ -x_3 + x_4 & \leq 3 \\ x_3 + x_4 & \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}\right\} \ X \text{ seti olsun.}$$

X seti ;



X_1 seti



X_2 seti

- X seti iki ayrı sete ayrılarak ele alınacabilir.
- Bu ayrışma uygun şekilde problemi dönüştürülürse;

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{t_1} (c_1 x_{1j}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{t_2} (c_2 x_{2j}) \lambda_{2j}$$

s.t.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{t_1} (A_1 x_{1j}) \lambda_{1j}}_{x_1, x_2 \text{ 'ler}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{t_2} (A_2 x_{2j}) \lambda_{2j}}_{x_3, x_4 \text{ 'ler}} \leq b$$

$$\sum_{j=1}^{t_1} \lambda_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{t_2} \lambda_{2j} = 1$$

$$\lambda_{1j} \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots t_1$$
$$\lambda_{2j} \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots t_2$$

- $c_1 = (-2, -1)$, $c_2 = (-3, -1)$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $x_{11} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ ve $x_{21} = (x_3, x_4) = (0, 0)$

ve x_{11} ve x_{21} master kısıtlarını sağlıyor

$\Rightarrow$ elimizde bir temel çözüm var demektir.

temel değişkenler: $\underbrace{s_1, s_2}_{\text{Master prb. slack değ.}}$, λ_{11}, λ_{21}

Dolayısıyla master problem için; başlangıç tablosu;

	s_1	s_2	λ_{11}	λ_{21}	
z	0	0	0	0	0
s_1	1	0	0	0	6
s_2	0	1	0	0	4
λ_{11}	0	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	0	1	1

$(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2)$

B^{-1}

İterasyon 1:

Sub prb. 1

$\max (wA_1 - C_1)X_1 + \alpha_1$

s.t.

$X_1 \in \mathbb{X}$

Sub prb. 2

$\max (wA_2 - C_2)X_2 + \alpha_2$

$(w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2) = (0,0,0,0)$

SB 1

$\max \cdot 2x_1 + x_2 + 0$

s.t.

$(x_1, x_2) \in \mathbb{X}_1$

opt. sol. $X_{12} = (x_1, x_2) = (6,0)$

(grafiğe bakınız.)

SB2

$\max \; 3x_3 + x_4 + 0$

s.t.

$(x_3, x_4) \in \mathbb{X}_2$

opt. sol. $X_{22} = (x_3, x_4) = (5,0)$

$(WA_1 - C_1)X_{12} + \alpha_1 = 12 > 0$, $(WA_2 - C_2)X_{22} + \alpha_2 = 15 > 0$.

SB1 obj. değeri — SB2 obj değeri

λ_{12} temele girebilir — λ_{22} temele girebilir.

λ_{22}'yi seçelim. $z_{22} - \hat{c}_2 = 15$

Alt sınır $= 0 - 12 - 15 = -27$

$= \hat{c}_B \bar{b} - \underbrace{\sum_i z_{ik} - \hat{c}_{ik}}_{\text{tüm subproblemler}}$

Master problem:

$z_{22} - \hat{c}_{22} = 15 \rightarrow \begin{pmatrix} A_2 X_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kolonunu oluşturmalıyız.

$A_2 X_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_2 X_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_{22} = B^{-1} \begin{pmatrix} A_2 X_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 X_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

						λ_{22}
z	0	0	0	0	0	15
s_1	1	0	0	0	6	5
s_2	0	1	0	0	4	10
λ_{11}	0	0	1	0	1	0
λ_{21}	0	0	0	1	1	0

z	0	$-3/2$	0	0	-6
s_1	1	$-1/2$	0	0	4
λ_{22}	0	$1/10$	0	0	$2/5$
λ_{11}	0	0	1	0	1
λ_{21}	0	$-1/10$	0	1	$3/5$

$w_1 = 0,\ w_2 = -3/2$ (s_1, S_2 temele girmez)

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0$

İterasyon 2

$(wA_1 - c_1) = (2, -1/2) \qquad (wA_2 - c_2) = (0, -\frac{1}{2})$

SB1

$\max\ 2x_1 - 1/2\, x_2 + 0$

s.t.

$(x_1, x_2) \in X_1$

opt. çöz. $x_{13} = (x_1, x_2) = (6, 0)$

(grafikten)

$obj = z_{13} - \hat{c}_{13} = (wA_1 - c_1)x_{13} + \alpha_1$

$= 12$

$\Rightarrow \lambda_{13}$ temele girmeli

SB2

$\max\ 0x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 0$

$(x_3, x_4) \in X_2$

opt. çöz: $x_{23} = (x_3, x_4) = (5, 0)$

$obj = z_{23} - \hat{c}_{23}$

$= (wA_2 - c_2)x_{23} + \alpha_2$

$= 0$

$(5, 0) \to \lambda_{22}$ olarak zaten temelde.

Alt sınır $= -6 - 12 - 0 = -18$

Master problem:

$z_{13}-\hat{c}_{13}=12.$ $\begin{pmatrix} A_1 x_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kolonuna ihtiyaç var.

$$A_1 x_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 x_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_{13} = B^{-1}\begin{pmatrix} A_1 x_{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu kolonu tevele girdireceğiz;

						λ_{13}
z	0	$-3/2$	0	0	-6	12
s_1	1	$-1/2$	0	0	4	6
λ_{22}	0	$1/10$	0	0	$2/5$	0
λ_{11}	0	0	1	0	1	1
λ_{21}	0	$-1/10$	0	1	$3/5$	0

z	-2	$-1/2$	0	0	-14
λ_{13}	$1/6$	$-1/12$	0	0	$2/3$
λ_{22}	0	$1/10$	0	0	$2/5$
λ_{11}	$-1/6$	$1/12$	1	0	$1/3$
λ_{21}	0	$-1/10$	0	1	$3/5$

$w_1=-2,\ w_2=-1/2$

Iterasyon 3

$(WA_1 - C_1) = (0, -3/2)$ $(WA_2 - C_2) = (0, -3/2)$

SB1

$\max \; 0X_1 - \frac{3}{2}X_2 + 0$

s.t.

$(X_1, X_2) \in X_1$

opt. çöz. $X_{14} = (X_1, X_2) = (0,0)$

obj $= 0$

(λ_{11} olarak temelde)

SB2

$\max \; 0X_3 - \frac{3}{2}X_4 + 0$

$(X_3, X_4) \in X_2$

opt. $X_{15} = (X_3, X_4) = (0,0)$

obj $= 0$

(λ_{21} olarak temelde)

$\Rightarrow$ temele girecek kolon yok. Mevcut çözüm optimal.

$\Rightarrow$ Opt çözüm:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda_{11} X_{11} + \lambda_{13} X_{13} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \lambda_{21} X_{21} + \lambda_{22} X_{22} = 3/5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = (4, 0, 2, 0)$ obj $= -14$

Dantzig-Wolfe Bender's ayrışım metodu ilişkisi;

Aşağıdaki DP'yi de alalım:

$$P: \text{Min } CX$$
$$\text{s.t.}$$
$$AX = b$$
$$X \in \mathbb{X} = \{x : DX \leq d, \, x \geq 0\}$$

$\mathbb{X}$: sınırlı ve olurlu çözümü olan bir set olsun.

P'nin dualini yazalım (D):

$$D: \text{Max } wb + vd$$
$$\text{s.t.}$$
$$wA + vD \leq C$$
$$w: \text{unr}, \; v \geq 0$$

* w'nun sabit değerleri için, D problemi bir DP modeli olur ve çözümü kolaydır. Bunda faydalanmaya çalışacağız. D yi aşağıdaki gibi yazarız;

$$D: \max_{w: \text{unr.}} \left\{ wb + \begin{array}{c} \max \; vd \\ \text{s.t.} \\ vD \leq C - wA \\ v \geq 0 \end{array} \right\}$$

max prb.nın duali.

$$D = \max_{w\ unr.} \left\{ wb + \underbrace{\min_{x \in X} (c - wA)x}_{\text{iç opti prb.}} \right\}$$

- iç opti probleminin extreme noktaları

$x_1, x_2 \ldots x_t$ olsun;

$$D = \max_{w\ unr.} \left\{ wb + \min_{j=1,\ldots,t} (c - wA)x_j \right\}$$

Bu problemin eşdeğeri problem (master problem);

$$MP: \max\ z$$

s.t.

$$z \leq wb + (c - wA)x_j \quad j = 1, \ldots, t \qquad (7.14)$$

$$z, w\ unr.$$

- MP'yi direk çözmek kolay değildir (x_j'lerin sayısı çok fazla olabilir.)

- Bunun yerine bir gevşetme stratejisi izleyeceğiz;

- 7.14'teki kısıtlardan bazılarını içerecek bir modeli çözelim. Bu modelede gevşetilmiş master problem denir (relaxed master prb.)

- bu gevşetilmiş master problemin opt. çözümü

$(\bar{z}, \bar{w})$ olsun.

* Eğer $(\bar{z}, \bar{w})$ (7.14)'teki tüm kısıtları sağlar ise $(\bar{z}, \bar{w})$ MP nin opt. çözümüdür.

* Kontrol etmek istediğimiz şart;

$$\bar{z} \leq \bar{w}b + (c - \bar{w}A)x_j \quad \text{for all } j = 1, \dots, t$$

$$\equiv \bar{z} \leq \underbrace{\bar{w}b + \min_{j=1,\dots,t} \{(c - \bar{w}A)x_j\}}$$

$$\equiv \bar{w}b + \min_{x \in X} \{(c - \bar{w}A)x\} \quad (7.15)$$

* Eğer $\bar{z}$, (7.15) teki opt. probleminin çözümünden küçük eşit ise $(\bar{z}, \bar{w})$ optimal çözümdür (MP için)

* Aksi durumda;

- Eğer x_k, (7.15) probleminin opt. çözümü ise

$\bar{z} > \bar{w}b + (c - \bar{w}b)x_k$ 'dır ve

$z \leq wb + (c - wb)x_k$ kısıtı gevşetilmiş mastera eklenip, gevşetilmiş master tekrar çözülmelidir.

- Bu prosedür Bender's ayrışım tekniği olarak (Bender's decomposition or partitioning) bilinir

(7.14) → Bender's master problemi

7.14 için gevşetilmişi → Bender's gevşetilmiş master

(7.15) → Benders' subproblem.

D.W. - Benders ilişkisi:

(7.15) → DW metodunda çözülen subproblemle aynıdır.

(7.14) → DW ta çözülen master problemin dualidir

DW master: $\xrightarrow{\text{DUALİ}}$ BD Master:

$$\min \sum_{j=1}^{t} (cX_j)\lambda_j$$

s.t.

$$w \rightarrow \sum_{j=1}^{t} (AX_j)\lambda_j = b$$

$$z \rightarrow \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\max z$$

s.t. $\quad cX_j - wAX_j$

$$\lambda_j \rightarrow z \leq wb + (c - wA)X_j \quad j = 1 \ldots t$$

z, w unr.

- D.W.'ta kolonlar üretiliyor
  BD'ta satırlar üretilir.

- BD prosedürü sonlandığında, primal çözüm, X_j'ler ile en son gevşetilmiş BD master probleminde yer alan kısıtlara karşılık gelen λ_j'ler ile çarpılarak elde edilir. Yani BD masterdaki kısıtların slack değişkenleri sıfırdır. Dolayısıyla DW modelinde karşılık gelen λ_j'ler temel değişkenlerdir.